MATEMÁTICA

PARA INGRESANTES

Teoría - Práctica
Anexo
Modelos de exámenes al final

Ruth **Martínez Valenzuela**
María Amelia **Mini**
Nélida Haydée **Pérez**
Barbara **Bajuk**
Magdalena **Pekolj**
María Rosa **Berraondo**

PROLOGO

Estudiar Matemática requiere realizar un cierto esfuerzo, pero este esfuerzo depara satisfacciones al comprobar que a medida que se comprende, se vencen con más facilidad las dificultades.

Este texto se ha realizado con el objetivo de poner al alcance de los aspirantes a ingresar a la Universidad Nacional de San Luis, un material de apoyo para temas que se han visto durante el Tercer Ciclo de la EGB y algunos del Polimodal, y que se consideran básicos para iniciar cualquier carrera de Ciencias e Ingeniería de esta Universidad.

Abarca desde números, sus operaciones y propiedades, pasando por el estudio de ecuaciones, polinomios, fracciones algebraicas y tópicos de geometría, e introduciendo someramente nociones de trigonometría. Finalmente se aborda el concepto de función, deteniéndose en funciones lineales y cuadráticas, haciendo hincapié en el trazado e interpretación de gráficas.

Los capítulos son:

- **Números**
- **Lenguaje Algebraico y Ecuaciones**
- **Expresiones Algebraicas**
- **Tópicos de Geometría**
- **Resolución de Triángulos Rectángulos**
- **Funciones**

En cada uno de ellos, se encontrará un resumen teórico, bastante amplio, para que ayudado por los ejemplos resueltos y ejercicios, se pueda recordar y entender los conceptos fundamentales.

Le asignamos importancia a la resolución de problemas, ya que el quehacer matemático consiste en gran medida en resolver situaciones problemáticas; en el capítulo 2, se sugieren pasos a seguir, que pueden ser de utilidad para resolver problemas en general.

Al final de cada capítulo se incluye una colección de ejercicios y problemas con el título de PRACTICO, conviene resolverlos. Es el complemento para reafirmar conocimientos y verificar la comprensión de los temas tratados.

Como complemento de este material puede usar la bibliografía sugerida al final y cualquier otro texto que trate estos temas.

Agradecemos a todos aquellos que nos ayudaron a mejorar esta edición, en especial a nuestra colega Ana Rubio Duca.

Las Autoras

INDICE

CAPITULO 1: Números Pág. 1
Números naturales. Múltiplos y divisores. Números primos y compuestos. Máximo común divisor. Mínimo común múltiplo. Números enteros. Números racionales. Interpresentación de números racionales. Fracciones. Expresión decimal de los números fraccionarios. Operaciones con fracciones. Fracciones y porcentajes. Números irracionales. Números Reales. Potenciación. Propiedades. Potencias de 10. Notación científica. Radicación. Potencia de exponente racional. Cálculos con radicales. Aproximación. Redondeo. Intervalos.
Práctico del capítulo. Pág.24

CAPÍTULO 2: Lenguaje Algebraico y Ecuaciones Pág. 33
El álgebra y lenguaje simbólico. Identidades. Ecuaciones y Resolución de problemas. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas. Método de sustitución. Método de reducción por suma y resta. Sistemas compatibles y sistemas incompatibles. Cómo plantear y resolver problemas. Ejemplos y ejercicios.
Práctico del capítulo. Pág. 53

CAPITULO 3: Expresiones Algebraicas Pág. 59
Monomios. Polinomios. Suma, resta y producto de polinomios. Identidades notables. División de polinomios. División de un polinomio por x-a. Regla de Ruffini. Valor numérico. Teorema del Resto. Raíces de un polinomio. Factor común. Factorización de polinomios. Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación. Operaciones con expresiones algebraicas.
Práctico del capítulo. Pág. 81

CAPITULO 4: Tópicos de Geometría Pág. 87
Ángulos. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal. Bisectriz. Pares de ángulos: consecutivos, complementarios, suplementarios, adyacentes, opuestos por el vértice. Ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas por una secante: correspondientes, alternos internos, alternos externos. Triángulos. Clasificación. Propiedades. Medianas, mediatrices, bisectrices y alturas de un triángulo. Perímetro y área. Igualdad o congruencia. Segmentos proporcionales. Teorema de Thales. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza de triángulos.
Práctico del capítulo. Pág. 99

CAPITULO 5: Resolución de Triángulos Rectángulos. Pág. 105
Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Aplicaciones. Trigonometría. Razones trigonométricas del triángulo rectángulo. Cálculo exacto de las razones trigonométricas para ángulos particulares. Algunas relaciones fundamentales. Ángulos orientados. Sistema circular otra forma de medir ángulos: radianes. Líneas trigonométricas. Resolución de problemas.
Práctico del capítulo. Pág. 119

CAPITULO 6: Funciones Pág. 123
Funciones y gráficas. Distintas formas de representación de una función. Definición de función. Funciones de una variable real. Funciones lineales. Distintas formas de obtener la ecuación de la recta. Rectas paralelas y perpendiculares. Intersección de rectas. Funciones formadas por trozos de rectas. Función valor absoluto. Funciones cuadráticas. Gráficas. Determinación del vértice y de puntos de corte con los ejes de una parábola. Relación entre solución de una ecuación de segundo grado y gráficas de parábolas. Problemas de aplicación.
Práctico del capítulo. Pág. 150

Bibliografía Pág. 159
Respuestas a los ejercicios Pág. 161

CAPÍTULO

1 Números

Podemos decir que la noción de número nació con el hombre. El hombre primitivo tenía la idea de número natural y a partir de allí, a lo largo de muchos siglos e intenso trabajo, se ha llegado al desarrollo que actualmente posee el concepto de número. Con los números expresamos cantidades y también medidas pudiendo además operar con ellos.

En el desarrollo de este capítulo recordaremos los distintos conjuntos numéricos y las operaciones que con ellos se pueden realizar, como también sus propiedades.

1.1 NÚMEROS NATURALES

Recordemos que el conjunto de los números naturales **N** está constituido por los números 1,2,3,4,5,..., 100,...,*n*...., con los cuales contamos, ordenamos y realizamos las operaciones de suma y multiplicación, siendo el resultado de estas operaciones también un número natural, sin embargo no ocurre lo mismo con la resta y con la división.

El conjunto de los números naturales tiene las siguientes características

- *Es un conjunto infinito.*
- *Tiene primer elemento, no tiene último elemento.*
- *Todo número natural tiene un sucesor, es decir, cada número natural, tiene un consecutivo.*
- *Todo número natural, salvo el uno, tiene antecesor.*
- *Entre dos números naturales consecutivos, no existe otro número natural, por eso se dice que el conjunto es* ***discreto.***

Por ser un conjunto ordenado, es posible representar a los números naturales en una recta, eligiendo como origen el cero, que puede ser incluido también en el conjunto, usando en ese caso el símbolo $\mathbf{N}_0$ para denotarlo.

1.1.1 Múltiplos y divisores

Hemos visto en los cursos iniciales de matemáticas que la multiplicación es una suma de términos iguales y puede escribirse de manera comprimida o abreviada:

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ veces}} = n \times a$$

Ejemplo: $3+3+3+3+3+3+3+3 = 8 \times 3 = 24$

En ese caso decimos que **24 es múltiplo de 3** y que **24 es múltiplo de 8**, o lo que es lo mismo: **3 es divisor de 24** y **8 es divisor de 24.**

Definición: *a* es **múltiplo** de *b* si es posible encontrar un número natural *k,* tal que se cumple:

$$a = k \cdot b$$

Si *a* es múltiplo de *b*, la división $a \div b$ tiene resto cero, por lo tanto decimos indistintamente:

- *a* es **múltiplo** de *b*
- *b* **divide a** *a*
- *b* es **factor de** *a*
- *a* es **divisible por** *b*

Son resultados inmediatos de la definición:

1 es divisor de todos los números pues: $a = 1 \cdot a$

0 es múltiplo de todos los números pues $0 = 0 \cdot a$

En nuestro ejemplo son equivalentes las proposiciones:

- 24 es múltiplo de 3
- 3 divide a 24
- 3 es factor de 24
- 24 es divisible por 3

Queda para el lector escribir proposiciones equivalentes, similares a las anteriores que correspondan para el caso de los números 24 y 8.

EJERCICIOS

1. ¿252 y 588 son múltiplos de 7? ¿La suma de ellos es múltiplo de 7? ¿Y su diferencia

2. Para pensar....

a) Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su divisor más pequeño? ¿y el mayor?
b) Si un número es divisor de otro, ¿también lo es de los múltiplos de éste? ¿Por qué?
c) Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su múltiplo menor? ¿y el mayor?
d) La suma de varios múltiplos de un número ¿también es múltiplo de dicho número? Si es verdad, demuéstralo; de lo contrario da un contraejemplo.

3. a) Enunciar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6,8, 9,11

b) Escribir Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

	V	F
♦ Si un número es divisible por 6, entonces, es divisible por 3.		
♦ Si un número es divisible por 3, entonces, es divisible por 6.		
♦ Si un número es divisible por 3 y por 5, entonces, es divisible por 15.		
♦ Si un número es divisible por 7, entonces, no es divisible por 2.		
♦ Si un número no es divisible por 4, entonces, no es divisible por 2.		
♦ Si un número es divisible por 16, entonces, es divisible por 8 y por 4.		

c) El número de pollos de un criadero es menor que 1000. Si los agrupamos de a 5, de a 6, de a 9 o de a 11, siempre sobra 1. ¿Cuántos pollos hay en el criadero?

1.1.2 Números primos y compuestos

La cantidad de divisores que tiene un número permite clasificarlo en **número primo o número compuesto**, recordemos que todo número *n* mayor que 1 tiene como divisores al 1 y a él mismo. Si admite sólo estos divisores, se dice que el número es **primo.** Si los divisores son más de dos, el número es **compuesto** y en ese caso es posible factorizarlo como producto de los números primos que lo dividen. Esta descomposición es única, salvo el orden en que pueden usarse los números primos como factores.

Ejemplos:

- **2 es un número primo**, pues tiene solamente dos divisores: él mismo y el 1. Es bueno destacar que el número 2 es el único número primo par.
- **50 es un número compuesto,** pues admite los divisores 1, 2, 5, 10, 25, 50 y puede factorizarse usando números primos. Así: $50 = 5^2 \cdot 2$
- **1 no es número primo**.

EJERCICIOS

1. Para pensar:

a) La suma de dos números primos ¿es un número primo? ¿Siempre? Justifica tu respuesta.

b) El producto de números primos ¿es un número primo? Justifica tu respuesta.

1.1.3 Máximo común divisor

Buscamos los divisores de los números 24 y 36:
Los divisores de 24 son: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, **12**, 24. Los divisores de 36 son: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 9, **12**, 18, 36. Observamos que los divisores comunes a ambos números son : **1, 2, 3, 4, 6,12.**
El mayor de ellos es **12**, al que llamamos: **máximo común divisor,** por ser el mayor de los divisores comunes y lo denotamos así:

$$\text{mcd}\,(24,36) = 12$$

Escribiendo los números 24 y 36 factorizados, podemos calcular en forma práctica el máximo común divisor, sin necesidad de listar los divisores de cada uno de los números. Así, $24 = 2^3 \cdot 3$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$ para encontrar el mcd (24,36) *debemos realizar el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones tomándolos con el menor exponente con que figuran.* Por lo tanto, elegimos 2^2 y 3, resultando entonces:

$$\text{mcd}\,(24,36) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

tal como lo habíamos obtenido al hacer el listado de los divisores de los números 24 y 36.

Nota: Si mcd (a,b) = 1, es decir, 1 es el único divisor común de a y b, diremos que a y b son coprimos o primos entre sí.

1.1.4 Mínimo común múltiplo

Tomemos ahora los números 12 y 9, busquemos sus primeros múltiplos. Los primeros múltiplos de 12 son: 12, 24, **36**, 48, 60**, 72**, 84, 96, **108,** 120, 132…Los primeros múltiplos de 9 son: 9, 18, 27, **36,** 45, 54, 63, **72**, 81, 90, 99, **108,** 117…. Observamos que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y hay infinitos múltiplos comunes a ambos: **36, 72, 108**…El menor de ellos, el **36**, es lo que llamamos el **mínimo común múltiplo** por ser el menor de los múltiplos comunes y lo indicamos así*:*

$$\text{mcm}\,(12,9) = 36$$

Escribiendo los números 12 y 9 en forma factorizada, podemos calcular en forma práctica el mínimo común múltiplo sin necesidad de listar los múltiplos de cada uno de los números. Siendo $9 = 3^2$ y $12 = 3 \cdot 2^2$ para encontrar el **mcm(12,9)** *debemos realizar el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones como también los que no lo son tomándolos con el mayor exponente con que figuran.* Por lo tanto elegimos 2^2 y 3^2, resultando entonces:

$$\text{mcm}\,(12,9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

tal como habíamos obtenido al hacer el listado de los múltiplos de los números 12 y 9.
Queda para el lector verificar que $\text{mcm}\,(24,36) = 72$

EJERCICIOS

1. En la Autopista Serranías Puntanas, de 240 km de largo, han planificado colocar:
- ♦ cabinas telefónicas cada 12 km
- ♦ puestos sanitarios cada 30 km
- ♦ estaciones de servicio cada 15 km

a) Si en el kilómetro 0 existen los tres servicios, ¿en qué kilómetros vuelven a coincidir los tres?

b) Si la Autopista se extiende 60 km más, al final de este nuevo tramo, ¿volverán a coincidir?

c) ¿Qué característica tienes los números de los kilómetros que coinciden los tres servicios?

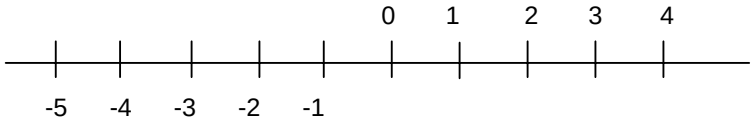
2. El árbol de Navidad de mi casa tiene dos guirnaldas de luces, una se prende cada 6 segundos y la otra cada 9 segundos. ¿Cada cuántos segundos se prenderán las dos juntas?

1.2 NÚMEROS ENTEROS

Recordemos que la resta en el conjunto de los números naturales siempre es posible cuando el minuendo es mayor que el sustraendo, en caso contrario no es posible. Para resolver este problema necesitamos ampliar el campo numérico introduciendo el cero y los opuestos de los números naturales, llamados números enteros negativos.

Obtenemos el **conjunto de los números enteros: Z** $= \{.....,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,.....\}$

Pueden representarse en la recta numérica como sigue:



Definición: Si x es un número entero $-x$ es el opuesto de x.

Ejemplos: a) Sea $x = -7$, su opuesto es $-x = 7$. **b)** Sea $x = 4$, su opuesto es $-x = -4$.

Los enteros se pueden ordenar, las operaciones de suma, resta y producto dan como resultado un número entero, sin embargo no ocurre lo mismo con la división, por ejemplo 8 dividido 3 no da un número entero.

Debemos destacar que el conjunto Z tiene las siguientes características:

- Es un conjunto infinito.
- No tiene ni primer elemento ni último.
- Es un conjunto discreto.
- Cada número entero tiene un antecesor y un sucesor.

1.2.1 Valor absoluto

Para cada número entero x definimos el **valor absoluto** de x, que indicamos $|x|$, como sigue:

Si el número x es positivo o cero, su valor absoluto es el mismo número y es su opuesto, $-x$, si el número es negativo. Simbólicamente:

Definición: $$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

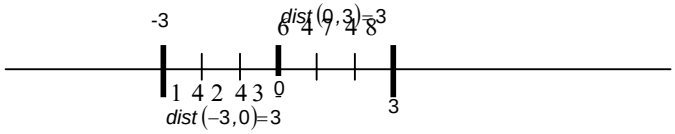
Recordemos:

El valor absoluto de cada número entero, es siempre un número no negativo.

Ejemplos:

$$|3| = 3 \; ; \qquad |-3| = -(-3) = 3$$

Geométricamente, el valor absoluto mide la distancia del número *x* al cero, los ejemplos anteriores quedan representado en la recta por:



EJERCICIOS

1. Encontrar el valor de cada una de las expresiones siguientes, para $x = 2$ y $y = -3$:

a) $|x + y|$ b) $|2(x + y)|$ c) $|x + 3y|$ d) $|x - y|$

e) $|2(x - y)|$ f) $y - |x - 3y|$

1.2.2 Comparación de números enteros

Dados dos enteros *a* y *b*, se dice que *a* < *b* si y sólo si *b* - *a* > 0.

Observación:

- Todo número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.
- Dados dos números enteros negativos, *a* y *b, b* > *a sI y sólo si* | a | > | b |

EJERCICIOS

1.- Escribir cada enunciado usando desigualdades

a) *x* es positivo
b) *y* es negativo
c) *t* es menor que 6
d) *u* es menor o igual que 1
e) *z* es mayor que -5
f) *x* es menor que 5
g) *x* es mayor o igual que -3
h) *t* está comprendido entre –3 y 0
i) *z* es menor que –3
j) *t* es menor que 5 mayor que -2
k) *y* es menor que o igual que 2 e y mayor que 0

1.3 NÚMEROS RACIONALES

Nos vemos en la necesidad de ampliar nuevamente nuestro campo numérico, puesto que con los números enteros podemos "contar" pero no siempre "medir". Para expresar medidas necesitamos números que representen "partes de la unidad", de aquí surge la idea de número fraccionario: la mitad, la tercera parte, las dos quintas partes,...de una unidad.
El conjunto de los números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los **números racionales**, al que denotamos por **Q**.

Definición: Un número racional $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, con $b \neq 0$, siendo *a* el numerador y *b* el denominador.

Cuando en una fracción, el numerador y el denominador son números primos entre sí, decimos que la fracción es **irreducible**.

Características de **Q**

- **Q** es un conjunto denso, es decir que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.
- En **Q** no podemos hablar de sucesores o antecesores.

Ejemplo: Dados dos números racionales *a* y *b*, siempre es posible encontrar otro entre ellos. Una manera sencilla de determinarlo es la semisuma: $\frac{a+b}{2}$.

Queda para el lector la verificación: $a<\frac{a+b}{2}<b$.

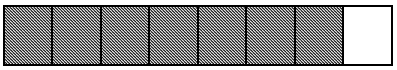
En este conjunto, las cuatro operaciones elementales son cerradas, es decir, el resultado obtenido es siempre un número racional.

1.3.1 Interpretación de números racionales

El número racional $\frac{a}{b}$ indica que dividimos en *b* partes iguales al todo y tomamos *a* de esas partes. Así, dado el número $\frac{7}{8}$, éste nos indica que el todo se ha dividido en 8 partes iguales y de ellas se han tomado 7. Una de las formas gráficas de interpretar la situación anterior, es:

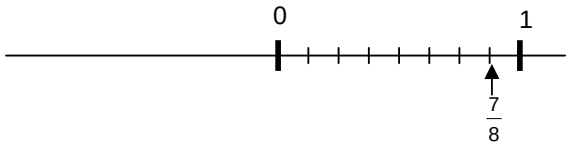
Ejemplo :

- Si representamos el todo mediante una barra, ésta se ha dividido en 8 partes iguales



de las 8 partes iguales se toman 7, la parte sombreada representa el número $\frac{7}{8}$

- En la recta numérica, como siete octavos es menor que uno, dividimos la unidad en ocho partes iguales, contamos siete de ellas a partir del cero, obteniendo así el punto de la recta que representa al número $\frac{7}{8}$:



EJERCICIOS

1.- Representar en la recta numérica los siguientes números: $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{7}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{17}{3}$, $\frac{1}{5}$

1.3.2 Fracciones

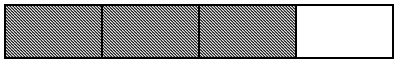
a) Fracciones equivalentes

A menudo trabajaremos con *fracciones equivalentes*, por lo tanto, es útil recordar que:

Definición: Dos fracciones son equivalentes o iguales si representan la misma cantidad.

Ejemplo: $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ de un mismo todo representan la misma cantidad.

$\frac{3}{4} < 1$, por lo tanto, necesitamos sólo una unidad para representarla gráficamente como lo muestra la figura:

$\frac{3}{4}$ lo representamos por: 

$\frac{6}{8}$ lo representamos por:

Si multiplicamos (o dividimos) el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente a la dada.

Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$ por lo tanto, $\frac{3}{4}$ es equivalente a $\frac{6}{8}$, como lo mostramos en la figura 1.

EJERCICIOS

1.- Usar gráficos para verificar que $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. ¿Cuántas unidades se necesitan para representar cada número?¿Por qué?

Podemos demostrar que:

> Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$

Usamos este resultado para verificar que $\frac{2}{10}$ y $\frac{1}{5}$ son equivalentes, pues $2 \cdot 5 = 10 \cdot 1$, en cambio $\frac{3}{4}$ y $\frac{21}{25}$ no son equivalentes, pues $3 \cdot 25 \neq 4 \cdot 21$

b) Comparación de fracciones

Definición: Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$, tal que $b > 0$ *y* $d > 0$, se define el siguiente **orden** en el conjunto de los números racionales:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si y sólo si, } a \cdot d < b \cdot c$$

En forma análoga se definen los símbolos: " > " , " $\leq$ " y " $\geq$ "

Dadas dos fracciones, $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$, siempre se las puede comparar, resultando alguna de las siguientes opciones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ó $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Propiedades:

- Una fracción positiva es mayor que cualquier fracción negativa.
- Dadas dos fracciones positivas de igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
- Dadas dos fracciones positivas de igual numerador es mayor la que tiene menor denominador
- Dadas dos fracciones positivas con distinto denominador y numerador, se llevan a fracciones equivalentes con igual denominador (o numerador) para hacer la comparación.
- Dadas dos fracciones negativas es mayor aquella cuyo valor absoluto es menor.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{7} < \frac{3}{7}$ ya que tienen el mismo denominador y $2 < 3$

b) $\frac{7}{2} > \frac{7}{3}$ ya que tienen el mismo numerador y $2 < 3$

c) $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$ ya que $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$

d) $-\frac{3}{8} > -\frac{2}{3}$ ya que $\left|-\frac{3}{8}\right| < \left|-\frac{2}{3}\right|$

A las fracciones las podemos interpretar también como una división, dando lugar a los números decimales.

1.3.3 Expresión decimal de los números fraccionarios

En muchas ocasiones conviene expresar un número fraccionario en forma de número decimal, para ello, basta dividir el numerador por el denominador.

Ejemplos:

1) $\frac{54}{1000} = 0.054$, obtenemos un número **decimal exacto,** puesto que el resto de la división es cero. A la fracción dada se le denomina **fracción decimal**, ya que el denominador es una potencia de 10, en este caso es 10^3

2) $\frac{197}{80} = 2.4625$, obtenemos un número **decimal exacto,** puesto que el resto de la división es cero.

3) $\frac{11}{3} = 3.666... = 3.\overline{6}$ no obtenemos un número decimal exacto puesto que el resto de la división no es cero, es un número **periódico puro**.

4) $\frac{87}{66} = 1.31818.... = 1.3\overline{18}$ no obtenemos un número decimal exacto puesto que el resto de la división no es cero, es un número **periódico mixto**.

Todo número racional se puede escribir en forma decimal.

A veces, el resultado es un decimal exacto, como en los ejemplos 1) y 2), otras veces producen un decimal periódico, como en los ejemplo 3) y 4).

Analizando el denominador de una fracción es posible determinar, que tipo de expresión decimal le corresponde, como veremos a continuación:

- Si en una fracción irreducible, la descomposición del denominador en factores primos sólo tiene los números 2 y/o 5, el número decimal correspondiente es exacto.

Para hallar el número decimal convertimos la fracción dada en una fracción decimal equivalente.

Ejemplo: $\frac{197}{80} = \frac{197}{2^4 \cdot 5} = \frac{197 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{197 \cdot 125}{10^4} = \frac{24625}{10000} = 2.4625$

- Si en una fracción irreducible el denominador tiene algún factor distinto de 2 y de 5, la expresión decimal correspondiente no es exacta y será periódica pura.

Ejemplo: $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$, no existe un número natural que multiplicado por 7 dé una potencia de 10, por lo tanto, su expresión decimal no es exacta.

- Si en una fracción irreducible el denominador contiene alguno de los factores 2 ó 5 y otro distinto de éstos, se obtendrá una expresión decimal periódica mixta.

Ejemplo: $\frac{7}{15} = \frac{7}{3 \cdot 5} = 0.4\overline{6}$

Dado cualquier número decimal se puede encontrar la fracción correspondiente.

- Si el denominador es decimal exacto, es fácil.

Ejemplos $0.4 = \frac{4}{10}$ $7.986 = \frac{7986}{1000}$ $0.00752 = \frac{752}{100000}$

Queda para el lector, encontrar la regla para el caso de los decimales exactos.

- Para pasar de un decimal periódico a forma de fracción, conviene observar atentamente en los siguientes ejemplos el procedimiento:

1) Escribir $N = 3.\overline{804}$ en forma de fracción

$$\left.\begin{array}{r} N = 3.804804.. \\ 1000 \cdot N = 3804.804... \end{array}\right\} restando: \quad 1000 \cdot N - N = 3801 \Rightarrow \; 999 \cdot N = 3801 \; \Rightarrow \; N = \frac{3801}{999}$$

Hemos obtenido que $3.\overline{804} = \frac{3801}{999}$

Regla 1: La fracción correspondiente a un decimal periódico puro se obtiene escribiendo, como numerador, el número dado sin la coma menos la parte entera y, como denominador, tantos 9 como cifras tenga el período.

2) Escribir $N = 0.00\overline{431}$, en forma de fracción, en forma similar al caso anterior:

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot N = 4.3131... \\ 100 \cdot (1000 \cdot N) = 431.3131... \\ \hline 100000 \cdot N - 1000 \cdot N = 427 \end{array}$$

$$99\,000 \cdot N = 427 \Rightarrow N = \frac{427}{99000}$$

Hemos obtenido $0.00\overline{431} = \frac{427}{99000}$

Regla 2: La fracción correspondiente a un decimal periódico mixto se obtiene escribiendo, como numerador, el número dado sin la coma menos la parte entera seguida de la parte no periódica y, como denominador, tantos 9 como cifras tenga el período seguida de tantos 0 como cifras tenga la parte no periódica.

Resumiendo:

a) Todo número racional puede expresarse como número decimal exacto o periódico.

b) Los números decimales exactos y periódicos, pueden expresarse en forma de fracción.

EJERCICIO

1.- Sin hacer la división, decida que clase de expresión decimal corresponde a las fracciones:

$$\frac{3}{40} \quad ; \quad \frac{5}{27} \quad ; \quad -\frac{2}{25} \quad ; \quad \frac{125}{60}$$

2.- Escribir en forma de fracción: $2.\overline{34}$; $1.12\overline{4}$; 1.075

1.3.4 Operaciones con fracciones

- **Suma**

Recordemos que la **suma** de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Ejemplos: $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+1+5}{9}=\frac{8}{9}$ $\qquad$ $\frac{3}{11}-\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{4}{11}-\frac{6}{11}=\frac{3-2+5+4-6}{11}=\frac{4}{11}$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

Ejemplo: $2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{150}{75}+\frac{30}{75}-\frac{35}{75}=\frac{180-35}{75}=\frac{145}{75}=\frac{29}{15}$

En general:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot d}{b\cdot d}$$

Es conveniente usar como denominador para las fracciones equivalentes, el mínimo común múltiplo. Observando el ejemplo anterior, vemos, que el denominador común para las fracciones equivalentes es 15, que es el mínimo común múltiplo entre 1; 5 y 15.

$$2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{30+6-7}{15}=\frac{29}{15}$$

Ejemplo: Calcular: $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$

Descomponiendo los denominadores en factores primos, obtenemos:

$$\text{m.c.m.}\left(6,10,8\right)=2^3\cdot 3\cdot 5=120$$

Por lo tanto: $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}=\frac{20}{120}+\frac{36}{120}+\frac{75}{120}=\frac{20+36+75}{120}=\frac{131}{120}$

- **Multiplicación**

Recordemos que el **producto** de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{6}{11}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{6\cdot(-3)\cdot 7}{11\cdot 4\cdot 2}=\frac{-126}{88}$.

En general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

- **División**

Para dividir fracciones, es conveniente recordar:

Definición: Dos fracciones $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$, son **recíprocas o inversas** si su producto es igual a 1, es decir: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1$.

De la definición obtenemos el siguiente resultado:

- Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inversa si y sólo si $a\neq 0$.
- La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$.

Para **dividir** una fracción por otra, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

Ejemplos: a) $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{7}=\frac{55}{42}$ b) $\frac{3}{7}:5=\frac{3}{7}:\frac{5}{1}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{35}$

En general:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

1.3.5 Partes de un todo

Hay situaciones en las cuales es necesario calcular partes o fracciones de cantidades, como por ejemplo: partes de cantidades de dinero, de superficies de terrenos, porciones de sustancias, etc. Para esos casos recordemos que:

La fracción $\frac{a}{b}$ de un número cualquiera p se obtiene multiplicando $\frac{a}{b}$ por el número p, es decir: $\frac{a}{b}\ de\ p=\frac{a}{b}\cdot p$

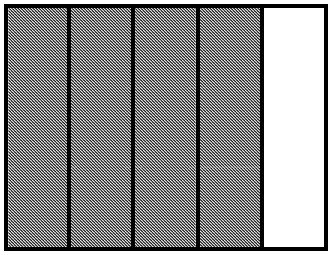
Ejemplo 1: Supongamos que tenemos 8 fichas y deseamos usar las $\frac{3}{4}$ partes de ellas. ¿Cuántas fichas usaremos?

Necesitamos calcular $\frac{3}{4}$ de 8, es decir, $\frac{3}{4}\cdot 8=6$

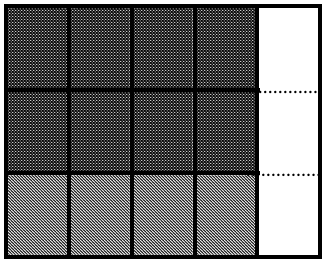
Usaremos 6 fichas.

Ejemplo 2: Sea ahora una situación en la que necesitamos calcular la fracción de otra fracción. Por ejemplo $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Para una mejor interpretación de la regla anterior, recurrimos a la representación gráfica. Representemos la fracción $\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$



$\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

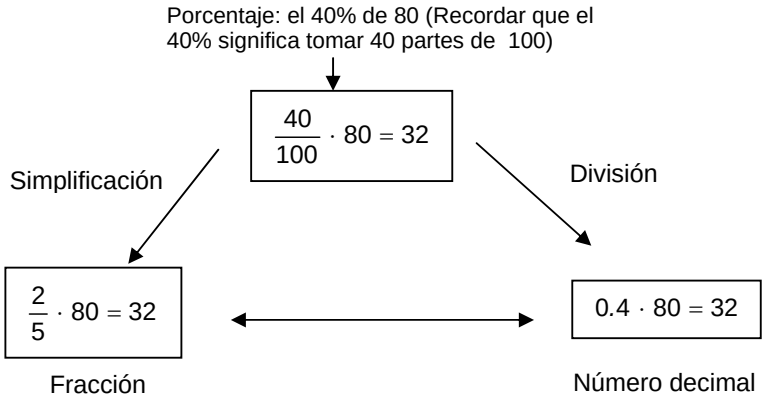


Es decir: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ es $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ del total

La fracción buscada es $\frac{8}{15}$

1.3.6 Fracciones y porcentaje

En la vida diaria, es habitual en nuestro lenguaje el uso de los términos: porcentaje, por ciento, como también el cálculo de ellos.
En el siguiente diagrama mostramos las diferentes maneras de expresar una parte de un todo.



Ejemplo 1: ¿Cuánto es el 15% de 38?.

$$\frac{15}{100}\cdot 38 = 0.15 \cdot 38 = 5.7$$

Otra forma: $\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}_{20}}\cdot 38 = \frac{3\cdot 38}{20} = \frac{114}{20} = 5.7$

5.7 representa el 15% de 38.

Ejemplo 2: ¿Qué parte del total representa el 25% de una cantidad C,

$$25\%\ de\ C = \frac{25}{100}\,C = \frac{1}{4}\,C$$

Representa la cuarta parte de esa cantidad C

- **Variación porcentual**

Si bien el cálculo de porcentajes es conocido, es bueno mejorar la comprensión de los aumentos y disminuciones porcentuales, como también afianzar las técnicas para el cálculo de ellos. Algunos ejemplos aclararán a lo que nos estamos refiriendo.

Ejemplo 1: Una remera cuesta inicialmente $ 18. Su precio sube un 15%. ¿Cuál es el nuevo precio?.

$$\text{nuevo precio} = 18 + \frac{15}{100}\cdot 18 = 18 + 0.15\cdot 18 = \underbrace{(1+0.15)}_{\text{coef. de variación}}\cdot 18 = 1.15\cdot 18 = 20.70$$

El nuevo precio es $ 20.70

En el ejemplo anterior, dado el valor inicial se calcula el valor final conociendo el porcentaje del incremento.

Ejemplo 2: Por pago al contado en un comercio hacen un descuento del 10%. ¿Cuánto se paga al contado por un artículo cuyo precio es de $ 139?

$$\text{Precio al contado} = 139 - \frac{10}{100}\cdot 139 = 139 - 0.10\cdot 139 = (1-0.10)\cdot 139 = 0.90\cdot 139 = 125.10$$

El precio por pago al contado es de $ 125.10

En este último ejemplo, conocido el valor inicial se calcula el valor final conociendo el porcentaje del descuento.
En general, cuando una magnitud aumenta o disminuye en un tanto por ciento, la relación entre el valor inicial y el nuevo es:

nuevo valor = coeficiente de variación • valor inicial

coeficiente de variación = 1 ± *r*, donde *r* es el tanto por ciento

Ejemplo 3: El precio de un producto era de $ 120 y sufrió un incremento del 14%. ¿Cuál es el nuevo precio?.

$$\text{nuevo precio} = (1+0.14)120 = 1.14\cdot 120 = 136.80$$

El nuevo precio es de $ 136.80 **.**

Ejemplo 4: He pagado $ 85.40 por un electrodoméstico. El precio incluye 21 % de IVA. ¿Cuál es el precio sin IVA?.

$$85.40 = (1+0.21)\cdot C \Rightarrow \frac{85.40}{1.21} = C \qquad (C = \text{precio sin IVA})$$

El precio sin IVA es de $ 70.58.

Ejemplo 5: Un saco costaba $ 160 y pagué por él $ 128 en una liquidación. ¿En qué porcentaje fue rebajado?.

$128 = (1-r).\ 160$ (por ser un descuento usamos 1-*r* como coeficiente de variación)

$\frac{128}{160} = 1-r \Rightarrow 0.8 = 1-r$ por lo tanto $r = 1-0.80$ es decir: $r = 0.20$

Por lo tanto el descuento es del 20%.

EJERCICIOS

1.- Resolver: **a)** $2.7 - \frac{1}{4} + 0.05$ **;**

b) $\left(20 \div \frac{1}{2}\right) \cdot 0.25 - \frac{5}{3}$

2.- Escribir, usando porcentaje, los siguientes enunciados:

- **a)** Dos de cada cinco alumnos juegan basquet.
- **b)** La cuarta parte de los alumnos hacen atletismo.
- **c)** Todos los alumnos asisten a la clase de historia.
- **d)** Tres octavos de los alumnos practican natación.
- **e)** Uno de cada cuatro alumnos aprobó la evaluación de matemáticas.
- **f)** Las tres cuarta parte del curso practica algún deporte.

1.4 NÚMEROS IRRACIONALES

Algunos decimales no son exactos ni periódicos. Recordemos de geometría al número π que se usa para calcular longitudes de circunferencias y áreas de círculos, para el cual la aproximación más usual es 3.1416. La representación decimal de este número continúa interminablemente sin repetición. Gracias a la tecnología que ahora tenemos, una computadora calculó π como decimal hasta cien cifras, he aquí algunas:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \ldots\ldots$$

Los pitagóricos fueron quienes descubrieron los números irracionales al aplicar el Teorema de Pitágoras (capítulo 5) en un triángulo cuyos catetos eran iguales a la unidad. Cuando calcularon la hipotenusa se encontraron que medía $\sqrt{2}$ y que no era un número natural. Para ellos los números naturales constituían el principio de todas las cosas, por esta causa, mantuvieron el descubrimiento de los irracionales en el más estricto secreto.

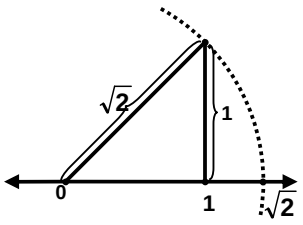
En los libros elementales de matemática encontraremos la demostración de que $\sqrt{2}$ no es un racional. Con éste número se pueden generar infinitos números irracionales, la forma es de sumarle a $\sqrt{2}$ un número racional: $1+\sqrt{2}$, $-7+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\frac{2}{3}$, etc.

Otra manera de obtener números irracionales es escribir un número cuyas cifras decimales sean infinitas y no presenten periodicidad:

0.12345678910111213141516171819 20...., -2.16716781678916711672....

El nombre de “irracional” proviene del hecho de que no se puede expresar como razón de dos enteros.

Las raíces cuadradas de los números naturales que no son exactas como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... se representan exactamente aplicando el Teorema de Pitágoras en la recta numérica. En la siguiente figura representamos $\sqrt{2}$.



EJERCICIO:

1.- Representar en la recta real $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-2+\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$, $\left|1-\sqrt{5}\right|$

1.5 NÚMEROS REALES

Los números racionales junto con los números irracionales, constituyen el **conjunto de números reales** (**R)**.

$$\textit{números reales} \begin{cases} \textit{racionales} \begin{cases} \textit{enteros} \begin{cases} \textit{naturales (enteros positivos)} \\ \textit{cero} \\ \textit{enteros negativos} \end{cases} \\ \textit{fraccionarios} \end{cases} \\ \textit{irracionales} \end{cases}$$

Existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta: a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa, por ello decimos que los números reales **cubren** la recta.
A continuación daremos las propiedades fundamentales de las operaciones en los números reales. Sean a, b y c números reales:

- La **suma** satisface las siguientes propiedades:
  - **a)** Asociativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$;
  - **b)** Conmutativa: $a+b=b+a$;
  - **c)** Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0\in\mathbf{R}\ /\ a+0=0+a=a$;
  - **d)** Existencia del elemento opuesto: $\forall\, a\in\mathbf{R}, \exists -a\in\mathbf{R}\ /\ a+(-a)=(-a)+a=0$

- El **producto** satisface las siguientes propiedades:
  - **a)** Asociativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;
  - **b)** Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$;
  - **c)** Existencia de elemento neutro: $\exists\ 1\in\mathbf{R}\ /\ a\cdot 1=1\cdot a=a$;
  - **d)** Existencia del elemento recíproco o inverso: $\forall\, a\in\mathbf{R},\ a\neq 0, \exists\, a^{-1}\in\mathbf{R}\ /\ a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$;
  - **e)** Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

- La **diferencia o resta** se define a partir de la definición de suma: $a-b=a+(-b)$, $\forall\, a,b\in\mathbf{R}$
- El **cociente** se define a partir de la definición de producto: $b\neq 0$, $a\div b=a\cdot b^{-1}$, $\forall\, a,b\in\mathbf{R}$

Observación: El 0 no tiene elemento inverso o recíproco.

EJERCICIOS

1. Dados los números reales:

5 ; -7 ; 3.2 ; $\frac{28}{7}$; $\frac{32}{14}$; $-\frac{20}{5}$; $2.1\overline{3}$; $-4.3\overline{5}$; $\sqrt{2}$;

$3.212112111211112\ldots$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{8}$; $23.454545\ldots$; $14.5666\ldots$

Clasificarlos en naturales, enteros, racionales, irracionales.

2. Representar en la recta numérica los números:

$$-\frac{2}{3} \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 0.7 \quad ; \quad \frac{1}{7} \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad -\frac{1}{7} \quad ; \quad -3.7$$

3. Dados los siguientes pares de números, reemplazar ☐ por <, > o = según corresponda:

a) $\frac{1}{2}$ ☐ 0 b) 5 ☐ $\sqrt{6}$ c) -3 ☐ $-\frac{5}{2}$ d) π ☐ 3.14159

e) $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}$ ☐ 1.41 g) $\frac{1}{2}$ ☐ 0.52 h) $\frac{1}{3}$ ☐ 0.333

i) 0.333... ☐ $\frac{1}{3}$ j) 0.67 ☐ $\frac{2}{3}$ k) 0.25 ☐ $\frac{1}{4}$ l) -1 ☐ -2

1.5.1 Potenciación

Definición: Sea n un número natural y a un número real cualquiera:

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$
$$a^1 = a$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 1$$

- **Propiedades:**

a) El producto de varias potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

b) El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) La potencia n-ésima de un producto es el producto de las potencias n-ésimas de sus factores: $(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$.

d) La potencia n-ésima de un cociente es el cociente de las potencias n-ésimas del dividendo y del divisor: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

e) La potencia de una potencia es igual a la misma base elevada al producto de los exponentes: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.

f) Si el exponente es negativo, se tiene: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos: a) $2^3 \,.\, 2^2 \,.\, 2^4 = 2^{3+2+4} = 2^9$ b) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

c) $(2 \,.\, 13 \,.\, 14)^3 = 2^3 .13^3 .14^3$ d) $(-3 \,.\, 5)^2 = (-3)^2 \,.\, 5^2$

e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^3 = \left(\frac{-5}{3}\right)^3 = \frac{(-5)^3}{3^3} = \frac{(-1)^3 \,.\, 5^3}{3^3} = -\frac{5^3}{3^3}$ f) $\left(3^4\right)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

g) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{2^{-5}}{3^{-5}} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{3^5}} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{3^5}{1} = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$

Observación: Cuando tenemos la potencia de una suma **no** se debe distribuir el exponente, ya que los resultados obtenidos no son los mismos, por ejemplo $(2+5)^2 \neq 2^2 + 5^2$ pues $7^2 \neq 29$
En general:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

- **Aplicación de la potenciación: Notación científica**

En los terrenos científicos y económicos se usan números muy grandes o muy pequeños lo cual tiene sus dificultades. Por un lado las operaciones con ellos son muy complicadas y por otro, al poseer tantas cifras, no es posible tener una idea de cuán grande o pequeño es el número.
El uso de la notación científica resuelve estos inconvenientes, resulta muy cómoda para la escritura de números grandes o muy pequeños y reduce a una forma sencilla las operaciones a realizar con ellos. Por ejemplo, la masa de un protón es aproximadamente $1.67 \cdot 10^{-27}$ kilogramos y la masa de la tierra es $5.98 \cdot 10^{24}$ kilogramos, estas cantidades están dadas en notación científica.

Dados los números:

a = 2460000000000000 y b = 0.0000000000004562

se pueden escribir de diversas formas utilizando las potencias de 10:

$$a = 246 \cdot 10^{13} = 2.46 \cdot 10^{15}$$
$$b = 4562 \cdot 10^{-16} = 4.562 \cdot 10^{-13}$$

En ambos casos, la **última** manera de escribir a y b recibe el nombre de **notación científica**.

Un número del tipo $x \cdot 10^n$ está en notación científica cuando $1 \leq x < 10$

Es importante observar que el número x es un decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de 0.
La notación científica permite captar rápidamente el orden de magnitud de una cantidad, por medio del exponente n. Así:

$2.34 \cdot 10^6$ representa millones, de los que hay 2.34

$3.21 \cdot 10^{-4}$ representa diezmilésimos, de los que hay 3.21

Dijimos también que las operaciones se simplifican notablemente. Veámoslo en el siguiente:

Ejemplo: El ser vivo más pequeño es un virus cuyo peso es del orden de 10^{-21} *kg* y el más grande es la ballena azul que pesa cerca de $1.38 \cdot 10^5$ *kg* ¿Cuántos virus serán necesarios para conseguir el peso de una ballena?.

$$\frac{peso\ ballena}{peso\ virus} = \frac{1.38 \cdot 10^5}{10^{-21}} = 1.38 \cdot 10^{26}$$

Harán falta $1.38 \cdot 10^{26}$ **virus para tener el peso de la ballena**

EJERCICIOS

1.- Resuelva aplicando propiedades de potenciación:

a) $2^2+2^5:2^3$, **b)** $-3^3\cdot(-3)^{-5}:(-3)^2$, **c)** $3a\cdot 3a^2.(3a)^{-3}$

2.- Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Modificar las expresiones incorrectas para que resulten correctas:

a) $\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^3=\frac{1}{64}y^6$, **b)** $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$, **c)** $(a-2b)^2+4ab=a^2+2b^2$,

d $\frac{\left(a^{-5}\cdot 2a^3\right)}{a^{-3}}=2a$, **e)** $\frac{(2x-3y)^2}{4x^2+12xy+9y^2}=-1$

3.- Exprese en notación científica los siguientes números:

a) 48000 , **b**) 0.000008 , **c**) 2345 , **d)** 234.5 , **e)** $38.7\cdot 10^4$, **f)** $0.0032\cdot 10^{-5}$.

4.- Escriba mediante notación científica, la equivalencia en metros, de las siguientes unidades de longitud: **a)** 1 micrón (1μ = 0.001 *mm*) **b)** 1 ángstrom (1 Δ= 0.0000001 *mm*).

5.- Supongamos que la Tierra está totalmente formada por arena y que es una esfera de 6500 *km* de radio. Si 100 gramos de arena ocupan $1mm^3$. ¿cuántos granos de arena habría en la tierra?.

1.5.2 Radicación

Definición: La raíz *n*-ésima de un número real *a*, denotada por $\sqrt[n]{a}$:

$$\sqrt[n]{a}=b \quad si \quad a=b^n$$

Cuando *n* es par, $a\geq 0$ y cuando *n* es impar, *a* es cualquier número real.

Cada número real positivo "*a*" tiene una única raíz *n*-ésima positiva y cada número real negativo tiene una única raíz *n*-ésima negativa, siempre que *n* sea un número impar.

Los siguientes comentarios son importantes:

- Los números negativos no tienen raíz cuadrada (en el conjunto de los números reales), ya que el cuadrado de cualquier número real es **no negativo**. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real pues no existe un número real cuyo cuadrado sea – 4.
- La raíz *n*-ésima, $n>1$, de 0 es 0, ya que $0^n=0$. Es decir, $\sqrt[n]{0}=0$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{64}=8$ b) $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$ c) $\left(\sqrt{1.4}\right)^2=1.4$

d) $\sqrt{5^2}=5$ e) $\sqrt{(-5)^2}=5$

Si se analiza e), se observa: $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=|-5|$

Resumiendo: Si $n\geq 2$ es un entero positivo y *a* es un número real, tenemos que:

$$\sqrt[n]{a^n}=a, \quad \text{si n es impar}$$
$$\sqrt[n]{a^n}=|a|, \quad \text{si n es par}$$

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{4^3} = 4$ b) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$ c) $\sqrt[4]{2^4} = 2$

d) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ e) $\sqrt{x^2} = |x|$

En lo que sigue supondremos que todos los radicales están definidos.

- **Propiedades:**

  a) La raíz *n*-ésima de un producto es el producto de las raíces *n*-ésimas de los factores: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$

  b) La raíz *n*-ésima de un cociente es el cociente de las raíces *n*-ésimas del dividendo y del divisor: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

  c) La raíz *m*-ésima de la raíz *n*-ésima de un número es igual a la raíz $(m \cdot n)$-ésima de dicho número: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{8.27.125} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{125} = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 30$

b) $\sqrt[6]{2} \,.\, \sqrt[6]{4} \,.\, \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2 \,.\, 4 \,.\, 8} = \sqrt[6]{2 \,.\, 2^2 \,.\, 2^3} = \sqrt[6]{2^{1+2+3}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

c) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3\,4]{2} = \sqrt[12]{2}$

1.5.3 Potencia de exponente racional

- Recordemos la definición: sea un número racional $\frac{m}{n}$, con $n \geq 2$, si *a* es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ está definida, entonces: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Ejemplos: a) $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$ b) $7^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7^3}}$

Observación: Las propiedades de las potencias de exponente racional son las mismas que las de las potencias de exponente natural.

Ejemplo: $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt[6]{8}} = \frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{3}{6}}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

1.5.4 Cálculos con radicales

a) Suma de radicales: Para sumar radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo: $\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(1+5-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}=\frac{11}{2}\sqrt{3}$

En algunos casos es necesario recurrir a la extracción de factores fuera del radical para que la suma pedida sea posible de realizar.

Ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{8}-3\sqrt{50}=\sqrt{2}+\sqrt{4}\sqrt{2}-3\sqrt{25}\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3.5\sqrt{2}=-12\sqrt{2}$

Hemos usado aquí propiedades de la radicación y factorización de los radicandos.

b) Multiplicación de radicales: Para multiplicar radicales, si tienen igual índice se usan las propiedades vistas, si tienen distinto índice se reduce a común índice y luego se efectúa el producto.

Ejemplos: a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{5^4\cdot 3^3}$ c) $\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{5^2\cdot 3^3}$

c) Racionalización de denominadores.

Cuando tenemos radicales en los denominadores, es conveniente encontrar una expresión equivalente que no contenga radicales en el denominador. En esos casos se dice que se ha **racionalizado el denominador**. Para ello, se multiplica y se divide la correspondiente fracción por una expresión adecuada, de manera de eliminar la raíz en el denominador.

Ejemplo 1: Sea $\frac{3}{\sqrt{7}}$ y necesitamos eliminar la raíz del denominador. Procedemos así: multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{7}$, es decir, $\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. La expresión encontrada es equivalente a la dada.

Ejemplo 2: Se pide racionalizar el denominador en $\frac{7}{1+\sqrt{5}}$.

En este caso se multiplican numerador y denominador por $1-\sqrt{5}$, a los fines de obtener en el denominador una diferencia de cuadrados, es decir :

$$\frac{7}{1+\sqrt{5}}=\frac{7}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{7\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{7\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4}=\frac{-7\left(1-\sqrt{5}\right)}{4}$$

- **Comparación de radicales:**

Los radicales que se pueden comparar son los que tienen índices iguales, siendo mayor el que tiene mayor radicando. Si los radicales son de distinto índice se reducen a común índice.

Ejemplo: Veamos cual de los números reales $\sqrt[3]{7}$ *y* $\sqrt[4]{11}$ es mayor.

$$\left.\begin{array}{lll}\sqrt[3]{7} & = & \sqrt[12]{7^4} \\ \sqrt[4]{11} & = & \sqrt[12]{11^3}\end{array}\right.\quad\begin{array}{l}=\sqrt[12]{2401}\\=\sqrt[12]{1331}\end{array}\Rightarrow \sqrt[3]{7}>\sqrt[4]{11}$$

1.6 Aproximación

Para operar con números decimales de muchas cifras, se emplean valores aproximados.

Ejemplo: Dado el número real $\sqrt{5}$. Es un número irracional, por lo cual tiene un número infinito de cifras decimales no periódicas. La calculadora nos da una aproximación:

$$\sqrt{5} \cong 2.2360679\,774$$

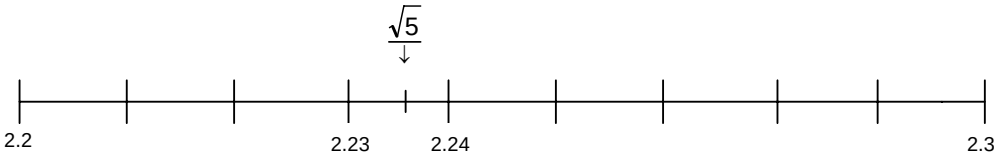
Las aproximaciones pueden ser por defecto o por exceso. La dada arriba es una aproximación por defecto, es decir: $2.2360679774 < \sqrt{5}$.

El número racional 2.236068 es una aproximación por exceso, es decir: $2.236068 > \sqrt{5}$.

- La **aproximación por exceso** es cuando el cálculo aproximado es mayor que el número dado.
- La **aproximación por defecto** es cuando el cálculo aproximado es menor que el número dado.

En la siguiente tabla, damos aproximaciones por defecto y por exceso.

	Aproximación por defecto	Aproximación por exceso
Con error menor que 1 décimo	$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$	
Con error menor que un centésimo	$2.23 < \sqrt{5} < 2.24$	
Con error menor que un milésimo	$2.236 < \sqrt{5} < 2.237$	



1.6.1 Redondeo.

En la práctica, el redondeo consiste en aumentar en una unidad la última cifra conservada, siempre que la primera omitida sea mayor o igual que 5.

Considerando el ejemplo anterior al aproximar la $\sqrt{5}$, el redondeo hasta los centésimos sería $\sqrt{5} \cong 2.24$.

1.7 Intervalos

En el conjunto **R** de los números reales están definidas las relaciones "menor que" ($<$), "mayor que" ($>$), "menor o igual que" ($\leq$) y "mayor o igual que" ($\geq$).
Cuando un número real *b* cumple simultáneamente que es mayor que un número *a* y menor que *c* ($a < b \ y \ b < c$) se puede expresar por la triple desigualdad: $a < b < c$
El conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b lo simbolizamos:

$$A = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

Un número real x pertenecerá al conjunto A si satisface la desigualdad $a < x < b$, es decir cumple que $a < x \ y \ x < b$.

Ejemplo

$B = \left\{ x \in R \,/\, -2 < x < \frac{7}{4} \right\}$ es el conjunto de todos los números reales mayores que –2 y menores que $\frac{7}{4}$.

El conjunto B es un **conjunto infinito**, pues existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales. Esa correspondencia biunívoca se mantiene si consideramos como en este caso los números comprendidos entre –2 y $\frac{7}{4}$.

Los siguientes números son algunos de los elementos del conjunto B:

$$0, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{100}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{2}{3}$$

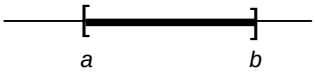
Definimos los siguientes conjuntos de números reales:

- **Intervalo abierto**: se simboliza (a,b) y es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, sin incluirlos.

  $(a,b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

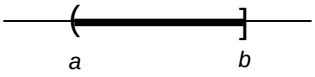
- **Intervalo cerrado**: se simboliza $[a,b]$ y es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, incluyéndolos.

  $[a,b] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$.

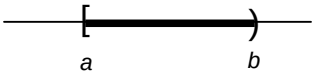


- **Intervalo semiabierto**:
  $(a,b]$ intervalo abierto por izquierda y cerrado por derecha, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluyendo al extremo *b*.

  $(a,b] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$



  De manera semejante se define $[a,b)$ intervalo cerrado por izquierda y abierto por derecha, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre *a* y *b* incluyendo al extremo *a*.



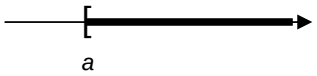
> ***Observación***:
> *En los intervalos* (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ *los números a y b se llaman* ***extremos del intervalo***.
> *Cuando el intervalo es abierto los extremos no pertenecen a él, en cambio cuando es cerrado si pertenecen.*
> *¿Qué ocurre en el caso de los intervalos semiabiertos*?

- **Intervalos no acotados.**

Las definiciones anteriores se pueden generalizar, para ello usaremos los símbolos $+\infty$ (se lee más infinito) y $-\infty$ (se lee menos infinito).
Con $+\infty$ debemos entender "supera cualquier número por grande que sea". O sea no es un número real y no se debe pretender operar con estos signos en nuestro estudio. Los usaremos por conveniencia de notación.

$[a,+\infty)$ denota el intervalo cerrado por izquierda y no acotado por derecha, corresponde al conjunto de todos los números reales mayores o iguales que *a* .

$[a,+\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$

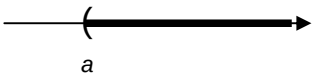


$(-\infty, b]$ denota el intervalo cerrado por derecha y no acotado por izquierda, corresponde al conjunto de todos los números reales menores o iguales que *b*.

$(-\infty, b] = \{x \in R \,/\, x \leq b\}$

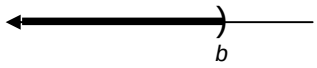
$(a,+\infty)$ denota el intervalo abierto por izquierda y no acotado por derecha, corresponde al conjunto de todos los números reales mayores que *a* .

$(a,+\infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$



$(-\infty, b)$ denota el intervalo abierto por derecha y no acotado por izquierda, corresponde al conjunto de todos los números reales menores que *b*.

$(-\infty, b) = \{x \in R \,/\, x < b\}$



Finalmente con $(-\infty,+\infty)$ denotaremos al conjunto de todos los números reales y su representación es toda la recta real.

EJERCICIOS

1.- Escribir cada desigualdad usando la notación de intervalo y luego graficar en la recta real:

a) $0 \leq x \leq 4$ b) $4 \leq x < 6$ c) $3 < x \leq -1$ d) $-2 \leq x \leq 0$

e) $-\frac{2}{3} < x < 5$ f) $-0.5 \leq x < 4.5$ g) $\frac{1}{2} < x \leq \frac{7}{2}$ h) $-5 < x < -\frac{5}{2}$

2.- Escribir cada intervalo como una desigualdad que involucre la variable *x* y luego graficar en la recta real:

a) $[2,5]$ b) $\left[-\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right)$ c) $\left(2, \frac{9}{4}\right]$ d) $(-3, 5)$

e) $(-\infty, 3]$ f) $[2,5]$ g) $[-1, +\infty)$

1.8 PRÁCTICO: NÚMEROS

Ejercicio 1: Resolver los siguientes ejercicios:

a) $16 \div (-2) - (-4+2) + 5 \cdot (-1)$ **b)** $|-3+5| \cdot (-1-|-1|) + 4 \cdot [-5+4 \cdot (-2+7)]$

c) $$\frac{16 \div [-3-22 \div (-2)] - (-2)}{4-(-5+2)-(10+|-5|) \div (-5)+4 \cdot (-2)}$$

Ejercicio 2: 13 y 31 son números primos. Determinar todos los pares de números primos de dos cifras que tengan los mismos dígitos.

Ejercicio 3: a) Determinar todos los divisores de: 50, 28, 73
b) ¿Cuál es el menor múltiplo de 8 mayor que 128?
c) ¿Cuál es el menor número natural por el que hay que multiplicar a 504 para que resulte un cuadrado perfecto?

Ejercicio 4: Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:
a) Un número es primo si sólo es divisible por si mismo.
b) Todos los números pares son compuestos.
c) El producto de dos números primos es un número compuesto.
d) El valor absoluto de un entero es siempre mayor o igual que dicho entero.
e) 1 y –1 son los únicos que tienen inverso en el conjunto de los números enteros.
f) La suma de dos números primos siempre es un número primo.

Ejercicio 5: Sea $n = 2520$, ¿es cierto qué:

	V	F
a) 36 es divisor de *n* ?		
b) 85 es divisor de *n* ?		
c) 50 es divisor de *n* ?		
d) 120 es divisor de *n* ?		

Ejercicio 6: Al dividir un número natural por 11, se obtiene resto cinco.

a) ¿El número, es múltiplo de 11?
b) ¿Cuál es el menor número que hay que sumarle para obtener un múltiplo de 11?
c) ¿Y el menor que hay que restarle?

Ejercicio 7: ¿Qué número de tres cifras es divisible por 4 y por 9 si posee un 3 en el lugar de las decenas?

Ejercicio 8: El número 1234 no es divisible por 11.

a) Cambiar sus cifras de lugar para obtener un número que si lo sea.
b) La solución ¿es única?

Ejercicio 9: Busquen dos números de cuatro cifras cuya primera y última sea 6, y que sean divisibles por 3, 4 y 11.

Ejercicio 10: La Municipalidad de San Luis, decidió controlar el estado de los vehículos que circulaban por la ciudad, por lo que implementó un operativo donde se examinaban los frenos cada seis automóviles, la documentación, cada diez y las luces, cada quince. Si a un vehículo se le realizó una revisión completa, ¿cuántos serán examinados después de éste para que nuevamente se realice una revisión completa?

Ejercicio 11: Multiplicar o dividir por el número que corresponda para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{25}$ b) $\frac{6}{8}=\frac{3}{\square}$ c) $\frac{\square}{24}=\frac{27}{8}$

Ejercicio 12: a) Escribir dos fracciones que sean respectivamente equivalentes a las dadas y que tengan el mismo denominador:

i) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ ii) $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{27}$ iii) $\frac{11}{4}$ y $\frac{7}{12}$

b) Escribir fracciones equivalentes a las dadas en cada caso, donde el denominador sea el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas:

i) $\frac{5}{33}$ y $\frac{7}{110}$ ii) $\frac{37}{3^5.2^2.7^3}$ y $\frac{11}{3^4.2^5.7^2}$

Ejercicio 13: a) Ordenar en forma creciente los siguientes números racionales:

i) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 1, \frac{14}{11}$ ii) $\frac{1}{3}, -\frac{11}{5}, -\frac{22}{3}, 2, \frac{4}{7}$

b) Ordenar utilizando la relación $\geq$ los siguientes racionales y representarlos en la recta numérica: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, 2, -\frac{3}{15}, \frac{14}{7}, \frac{3}{8}, \frac{9}{2}, -\frac{18}{4}$

Ejercicio 14: Calcular:

a) $-5\left(-\frac{3}{5}\right)$ b) $\frac{-(3-7)}{-5}$ c) $\frac{(-2+8)(-5-1)}{8-5}$

Ejercicio 15: ¿Qué condición ha de cumplir una fracción para que pueda transformarse en un decimal exacto?¿Y para que genere un decimal periódico?.

Ejercicio 16: Clasificar los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos. (Dar la respuesta sin efectuar la división).

$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{23}{10}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{4}{9}$

Ejercicio 17: Calcular mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción**:**

$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$

Ejercicio 18: Expresar en forma de fracción:

a) $25.\overline{8}$ b) 4.25 c) $4.2\overline{5}$ d) $3.04\overline{7}$ e) $0.1\overline{52}$ f) $1.23\overline{154}$

Ejercicio 19: Calcular esta suma de infinitos sumandos:

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+...$$

Ejercicio 20: Escribir en forma de número decimal y fracción decimal:

a) 6 décimos b) 6 centésimos c) 6 milésimos
d) 60 décimos e) 60 centésimos f) 60 milésimos
g) 345 décimos h) 5 diezmilésimos k) 532 diezmilésimos

Ejercicio 21: Hallar las fracciones irreducibles de los siguientes números:

a) 2.75 b) 16.783783... c) 0.30303... d) $2.58\overline{6}$ e) $0.034\overline{5}$

Ejercicio 22: Calcular:

a) $7-\left(-\frac{8}{3}\right)$ b) $7-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$ c) $\frac{3}{5}-\frac{4}{6}-2$

d) $-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{6}\right)$ e) $\frac{5}{6}\div\frac{15}{4}$ f) $\left(-\frac{12}{15}\right)\div\left(-\frac{14}{27}\right)$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot(-3)^{-1}$ h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ i) $5\cdot\left(-1-\frac{1}{4}\right)^{-1}$

j) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{4^4}{3}\right)$ k) $3-5\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{2}}$ l) $7-2\cdot\dfrac{2-1}{2-\frac{1}{5}}$

m) $3\cdot(-3)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$ n) $\dfrac{50+(-32)}{-(8-10)}\cdot\frac{5}{3}$ o) $\dfrac{(-9)\cdot 4\cdot(-5)}{5}-\dfrac{2}{(-3)\cdot(-6)}$

p) $-\frac{1}{3}(5-5\cdot 3)$

Ejercicio 23: Calcular:

a) $0.\overline{4}+0.\overline{3}+0.\overline{2}$ b) $3.0\overline{7}-1.6\overline{7}$ c) $2.1\overline{5}-1.4\overline{8}$ d) $0.\overline{6}\cdot 0.\overline{5}$ e) $2.1\overline{2}\div 0.1\overline{4}$

Ejercicio 24: i) Decidir si las igualdades dadas son correctas:

a) $\frac{3\cdot m}{m\cdot 6}=\frac{1}{2}$ b) $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{b}$ c) $\frac{3a+c}{a+c}=3$

d) $1+\frac{2a}{a+c}=\frac{3\ a+c}{a+c}$ e) $\frac{3a+c}{a+c}=\frac{4}{2}$ f) $\frac{a+b+2}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{2}{c}$

g) $\frac{m}{s+t}=\frac{m}{s}+\frac{m}{t}$ h) $\frac{4a}{b}=\frac{4}{b}\cdot\frac{a}{b}$ i) $\frac{a}{c}+\frac{b+2}{c}=\frac{a+b+2}{c}$

ii) Resolver:

a) $\frac{2a-1}{a}+\frac{1}{a}$ b) $\frac{5}{x}-\frac{5}{x-1}$ c) $\frac{3}{5x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{2xy}$ d) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

Ejercicio 25: Calcular:

a) $\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{3}$ de 30 c) $\frac{6}{7}$ de $\frac{21}{4}$

Ejercicio 26: Completar el cuadro de equivalencias:

PORCENTAJE	FRACCION	NUMERO DECIMAL
50%		
	1/4	
		0,75
20%		
	3/5	
		0,8

Ejercicio 27: En una ciudad hay dos clubes deportivos. Uno de cada 8 habitantes es socio de uno de ellos, y los 3/8 de la población están asociados al otro. ¿Qué porcentaje de la ciudad pertenece a cada club?.

Ejercicio 28: En 1970 había 250 águilas en la Cordillera. Durante la década 70-80 disminuyeron en un 12% . ¿Cuántas quedaban en 1980?.

Ejercicio 29: La canasta familiar sube un 20% y después baja un 10%. ¿Cuál ha sido finalmente el porcentaje de variación?.

Ejercicio 30: ¿Cuántos coches se vendieron el año pasado?.
Según el informe anual sobre ventas de vehículos en este año se han vendido 287.500 coches, lo que supone un incremento del 15% respecto del año pasado.

Ejercicio 31: Un comerciante compra un objeto por $ 120. Lo pone a la venta incrementando su precio en un 30%. Posteriormente lo rebaja en un 20% sobre el precio de venta al público. ¿Qué porcentaje de beneficio obtuvo? ¿Por cuánto lo vendió?.

Ejercicio 32: Una cantidad C se incrementa en un 12%. Este nuevo valor se incrementa en un 30%. ¿Cuál es el porcentaje correspondiente a la variación total?.

Ejercicio 33: Un coche usado costaba $ 8600 y pagué por él $ 8200. ¿De qué porcentaje fue la rebaja?.

Ejercicio 34: En los negocios suelen aparecer estas ofertas “lleve 3 y pague 2”. ¿A qué porcentaje de descuento equivale esta oferta?.

Ejercicio 35: Un automovilista hace un viaje en 2 etapas. En la primera consume $\frac{1}{5}$ de la nafta que llevaba en el tanque y en la segunda $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba, llegando al final del trayecto con 30 litros.

a) ¿Con cuántos litros emprendió el viaje?.

b) ¿Cuántos *km* recorrió en cada etapa, si el automóvil consume 5 litros de nafta cada 100 *km.*?.

Ejercicio 36: Un escritor escribió un libro en tres meses. En el 1º mes escribió $\frac{3}{7}$ del libro, en el segundo $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba?. ¿Qué parte del libro escribió durante el 3º mes?.

Ejercicio 37: En un curso de 35 alumnos, $\frac{1}{7}$ de los mismos no aprobó la evaluación de matemática. En otro curso $\frac{1}{6}$ de los 30 alumnos no aprobó la misma evaluación. ¿En qué curso fue mejor el rendimiento?

Ejercicio 38: Gabriel tiene $18, que son los $\frac{2}{5}$ del dinero que le regalaron. ¿Cuánto dinero le dieron a Gabriel?.

Ejercicio 39: Cada semana gasto $\frac{1}{8}$ de mi sueldo. Si al comenzar el mes, gasto $\frac{1}{5}$ en los gastos fijos. ¿Qué parte de mi sueldo llevo gastado al fin de la 2º semana?.

Ejercicio 40: Los $\frac{6}{7}$ de los alumnos de un curso son 30 alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el curso?.

Ejercicio 41: Los $\frac{4}{3}$ de una cantidad son 120. ¿Cuál es esa cantidad?

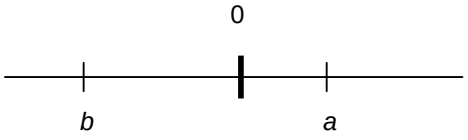
Ejercicio 42: En una carrera de bicicletas, uno de los ciclistas tarda 16 min en recorrer 4/5 del circuito y el otro invierte 14 min en recorrer 2/3 del mismo circuito. ¿Cuál de los ciclistas gana la carrera?.

Ejercicio 43: Escribir un número irracional mayor que 2 y menor que $\sqrt{5}$.

Ejercicio 44: Señalar sobre la recta, los puntos que corresponden a:

$$-3b \quad ; \quad -2a \quad ; \quad a+b \quad ; \quad a-b \quad ; \quad 2a+3b$$

siendo a y b los puntos indicados en la recta:



Ejercicio 45: Determinar cuanto debe valer n para que se verifique cada igualdad:

a) $0.000000123 = 1.23 \cdot 10^{n}$ b) $43560000000000000 = 4.356 \cdot 10^{n}$

Ejercicio 46: Colocar los exponentes para que sean correctas las igualdades:

$2540.187 = 2.540187 \cdot 10 \quad = 25401870000 \cdot 10$

$0.0000215 = 2.15 \cdot 10 \quad = 0.00215 \cdot 10$

Ejercicio 47: El volumen del agua de los océanos es de 1338 millones de km^3. Escribir el volumen en m^3, usando notación científica.

Ejercicio 48: Simplificar: $A = \dfrac{12^3 \cdot 10^2}{15^2 \cdot 6^4}$

Ejercicio 49: Realizar las siguientes operaciones sin usar calculadora

a) $32.73 \cdot 10$ d) $32.7\overline{3} \cdot 10$ g) $0.231 \cdot 0.01$

b) $0.231 \cdot 100$ e) $0.02\overline{7} \cdot 10000$ h) $34.2\overline{6} \cdot 0.001$

c) $0.027 \cdot 100$ f) $32.73 \cdot 0.1$ i) $13425.72 \cdot 0.0001$

Ejercicio 50: Realizar las siguientes operaciones sin usar calculadora.

q) $37.73 \div 10$ d) $0.027 \div 100$ g) $0.231 \div 0.01$

r) $0.231 \div 10$ e) $32.7373 \div 100$ h) $32.7\overline{3} \div 0.001$

s) $13.614 \div 100$ f) $32.73 \div 0.1$ i) $1.56 \div 0.1$

Ejercicio 51: Descubrir dónde está el error:

a) $-5^2 + 1 = 26$ d) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{3}$

b) $(3-\pi)^2 = 9 - \pi^2$ e) $3^2 + 4^2 = 7^2$

c) $4 \,.\, 3^2 = 144$ f) $4^2 - 3^2 = 25$

Ejercicio 52: Resolver, usando los valores exactos:

a) $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt{18} - 5\sqrt{50}$ c) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$

d) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{54}$ e) $\sqrt{8} \,.\, \sqrt[3]{2}$ f) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\ \left(1 - \sqrt{8}\right)$

Ejercicio 53: Calcular sin usar calculadora:

a) $\sqrt{\dfrac{7}{5}} \,.\, \sqrt{35}$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \,.\, \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ c) $\sqrt{5} \,.\, \sqrt{\dfrac{3}{10}} \,.\, \sqrt{6}$

Ejercicio 54: Siendo: $A = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ y $B = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ calcular $A + B$ y $A \cdot B$

Ejercicio 55: Resolver:

a) $\dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{27} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{27} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{27} - 3\sqrt{3}}$

Ejercicio 56: Racionalizar los denominadores:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{2x}{\sqrt{x}}$

d) $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}}$ f) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}-1}$

Ejercicio 57: Sabiendo que $\sqrt{5} < x$. ¿Cuál es el menor de los siguientes números?. ¿Los números dados son mayores que 1 o menores que 1?.

a) $\frac{\sqrt{5}}{x}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{x-1}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{x+1}$

Ejercicio 58: Decidir cuales de las siguientes igualdades son verdaderas o cuales son falsas.

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ b) $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$

c) $\sqrt{9m+9n} = \sqrt{9(m+n)} = 3\sqrt{m+n}$ d) $\sqrt{m} + \sqrt{m} = 2\sqrt{m}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{2x}$ f) $3\pi - 5(\pi - 2) = -2\pi + 2$

Ejercicio 59: ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{8}$ y su altura es $1+\sqrt{2}$? ¿Cuál es la medida de su área?.

Ejercicio 60: Simplificar y expresar el resultado usando exponentes racionales:

a) $\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}$ b) $\sqrt[4]{y^2 \cdot y^{3/2}}$ c) $\sqrt{x\sqrt{x}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m\sqrt{m}}$ e) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$ f) $\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m^3}}$

Ejercicio 61: Dados los números: $a = 5 + 2\sqrt{2}$ y $b = 5 - 2\sqrt{2}$ probar que $a+b$ y $a^2 + b^2$ son números enteros.

Ejercicio 62: Calcular, sin usar la calculadora

a) $\sqrt{1.6 \cdot 10^5}$ b) $\sqrt[4]{0.0001}$ c) $\sqrt{2.5 \cdot 10^{-3}}$

Ejercicio 63: a) Dar una aproximación por defecto de $\sqrt{2}$ usando 3 decimales.

b) Dar una aproximación por exceso de $\sqrt{2}$ usando 3 decimales.

Ejercicio 64: Aproximar al centésimo más cercano:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{5}{18}$ e) 0.581 f) 0.4281 g) $0.93\overline{1}$ h) $1.2315\overline{2}$

Ejercicio 65: Dados los números irracionales

$a = \sqrt{3}$ $b = \sqrt{3} + 3$ $c = 1 - \sqrt{3}$ $d = 4 - \sqrt{3}$

Decidir si las siguientes proposiciones son Verdaderos o Falsas:

i) $a + d$ es racional
ii) $b + c$ es racional
iii) $c \cdot d$ es racional
iv) c^2 es racional

Ejercicio 66: Expresar como intervalos y representar en la recta, los subconjuntos de números reales dados por:

a) $\{x / 2 < x < 5\}$; b) $\{x / -1 \leq x \leq 3\}$; c) $\{x / 4 < x \leq 6\}$; d) $\{x / 7 \leq x\}$; e) $\{x / x \leq -3\}$

Ejercicio 67: Graficar cada uno de los siguientes intervalos en una recta numérica:

a) $[-4, 2)$, b) $[2.3, 4]$, c) $(-2, \infty)$

Ejercicio 68: Exprese la desigualdad $-7 \leq x$ e n la notación de intervalos.

Ejercicio 69: Escribir cada desigualdad usando la notación de intervalo y luego graficar en la recta real:

a) $0 \leq x \leq 4$ b) $4 \leq x < 6$ c) $-3 < x \leq -1$ d) $-2 \leq x \leq 0$

e) $-\frac{2}{3} < x < 5$ f) $-0.5 \leq x < 4.5$ g) $\frac{1}{2} < x \leq \frac{7}{2}$ h) $-5 < x < -\frac{5}{2}$

Ejercicio 70: Escribir cada intervalo como una desigualdad que involucre la variable *x* y luego graficar en la recta real:

a) $[2, 5]$ b) $\left[-\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right)$ c) $\left(2, \frac{9}{4}\right]$ d) $(-3, 5)$

e) $(-\infty, 3]$ f) $[-2, 5]$ g) $[-1, +\infty)$ h) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{3}\right)$

CAPÍTULO

2 Lenguaje Algebraico y Ecuaciones

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así el ***gran paso de la aritmética al álgebra****. La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados*
Las ***ecuaciones*** *y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones representan al mismo número. Por* ***ejemplo****, la fórmula del área de un círculo es:* $A = \pi r^2$*. El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión:* πr^2**,** *pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio:* r *.*
A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella. En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación.
Los problemas de aplicación no vienen en forma " resuelva la ecuación", sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Cualquier solución matemática debe ser verificada si es solución del problema en cuestión, porque podría tener solución matemática que carezca de sentido con el contexto del problema. Los problemas que se te proporcionará serán de mayor o menor realismo con objeto de presentarte ejercicios para calcular el o los valores de ***x*** *a lo largo de toda la unidad.*

En este capítulo:

- *Recordaremos los conceptos necesarios para operar correctamente con igualdades.*
- *Desarrollaremos habilidad para resolver problemas aplicando ecuaciones de primero y segundo grado en una y dos incógnitas y sistemas de ecuaciones de primer grado en dos incógnitas.*
- *Repasaremos cuestiones de* ***álgebra elemental****, casi todo lo que diremos podría considerarse de repaso de cursos anteriores.*
- *Integraremos todos los conceptos dados hasta ahora.*

2.1 El álgebra y el lenguaje simbólico

¿Qué es el álgebra?. Es el manejo de relaciones numéricas en los que una o más cantidades son desconocidas, **incógnitas,** a las que se las representa por letras, por lo cual el **lenguaje simbólico** da lugar al **lenguaje algebraico.** Las operaciones para números: suma, resta, producto, división, son conocidas como **operaciones algebraicas** y cualquier combinación de números y letras se conoce como **expresión algebraica**. Por lo tanto, al traducir un cierto problema al lenguaje algebraico, se obtienen expresiones algebraicas, que son una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se las denomina, en general, **variables o incógnitas** y las simbolizamos con las últimas letras del alfabeto, en cambio las primeras letras se emplean para simbolizar números arbitrarios pero fijos, que llamamos **constantes**.

Frecuentemente aparecen igualdades que son de distinto tipo: identidades, ecuaciones y fórmulas.
Las **operaciones básicas con expresiones algebraicas,** se utilizan en el importante proceso de resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y otras importantes aplicaciones de ellas.

Ejemplos:
Escribir en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

a) La base es el doble que la altura.
Si llamamos $b = base$ y $h = altura$, la expresión algebraica es: $b = 2h$, pero también se podría haber llamado $x = base$ e $y = altura$ entonces se obtendría: $x = 2y$.

b) Dos números pares consecutivos.
$2n$ representa un número par, el siguiente número par es $2n + 2$, donde n es cualquier número entero.

EJERCICIOS

1.- Escribir en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados.

a) El cuadrado de la suma de dos números reales es igual a la suma de sus cuadrados más el doble de su producto.
b) El espacio recorrido por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.
c) Un número elevado a la 10 significa multiplicar 10 veces ese número.
d) El producto de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.
e) La suma de tres números enteros es 54.
f) Escribir un número natural, su anterior y su posterior.
g) La superficie de un cuadrado de lado *x* es 121.
h) El cociente de dos potencias de igual base es igual a otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes de las potencias que se dividen

---

2.2 Identidades

La igualdad, es el símbolo que más veces se utiliza en Matemática. Gran parte de los desarrollos matemáticos consisten en la transformación de una expresión en otra igual a ella.

La **igualdad verifica** las siguientes propiedades:

- Para todo ***a,*** se verifica ***a = a***
- Para cualquier par de números ***a*** y ***b,*** si ***a = b*** entonces ***b = a.***
- Para cualquier terna de números ***a, b*** y ***c,*** si ***a = b*** y ***b = c*** entonces ***a = c.***
- Si a los dos miembros de una igualdad se le suma (o resta) el mismo número, se obtiene otra igualdad.
- Si a los dos miembros de una igualdad se la multiplica (o divide) por el mismo número distinto de cero, se obtiene otra igualdad.

Estas dos últimas propiedades se utilizan continuamente para hallar la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones.
Una **identidad** es una **igualdad algebraica** válida para cualquier número real que se le asigne a las letras que intervengan.

Ejemplos:

1. La expresión $\frac{1}{2}(2x+4)-x=x$ es una **igualdad algebraica,** que **no** es una **identidad**, sólo es cierta para $x = 2$.
2. La expresión $2(x-5)+1=2x-9$, recibe el nombre de **identidad**, por que es verdadera para todos los números reales.
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, es una **identidad** que se ha visto en la unidad anterior.

¿Cuál es la ventaja de las identidades?
Que se puede transformar una expresión algebraica en otra equivalente mediante operaciones elementales.

EJERCICIOS

1. Escribir cinco identidades que se han visto en la unidad anterior.
2. Averiguar si las siguientes igualdades son identidades:

a) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ **b)** $a+a+a=3a$ **c)** $a+a+a=15$ **;**

d) $x\cdot x\cdot x=x^3$ **e)** $x\cdot x^3=x^4$ **f)** $x\cdot x^2=729$;

3. Partiendo de cada una de las expresiones de la izquierda, usar identidades para obtener la expresión de la derecha:

a) $(x+3)(x+3)-(x^2+x+6) \longrightarrow 5x+3$

b) $(x^2-1)-(x-1)^2 \longrightarrow 2(x-1)$

c) $(x+2)(x+6)-(x+2)(x+5) \longrightarrow x+2$

2.3 Ecuaciones y resolución de problemas

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman **incógnitas.**
Resolver una ecuación consiste en transformar la igualdad en otra equivalente más sencilla, hasta obtener la solución, que es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial.
Una expresión como $x+(x+1)+(x+2)=33$ es una ecuación, sólo es cierta para $x=10$. La solución es $x=10$.
Hay ecuaciones con muchas soluciones, e incluso infinitas soluciones, por ejemplo, $x+y=1$, $sen\, x=0$ y otras que no tienen solución como: $x + 3 = x$. Por lo tanto, resolver una ecuación es obtener las soluciones, si existen, que la satisfacen.
Para resolver una ecuación se utiliza las propiedades de la relación de igualdad y las propiedes de los números.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar el resultado.

a) $-2x-3=5$ **b)** $5(x+3)=2x+3$

Solución:
a)

$$-2x-3+3=5+3 \quad \text{(sumamos a ambos miembros 3)}$$
$$-2x=8 \quad \text{(realizamos las operaciones posibles)}$$
$$(-2x)\div(-2)=8\div(-2) \quad \text{(dividimos ambos miembros por } -2\text{)}$$
$$x=-4 \quad \text{(realizo las operaciones).}$$

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución.
Si reemplazamos en la ecuación original: $-2(-4) - 3 = 8 - 3 = 5$, vemos que la verifica.

b)

$5x + 15 = 2x + 3$	(en el primer miembro hemos aplicado la propiedad distributiva)
$5x + 15 - 15 = 2x + 3 - 15$	(restamos a ambos miembros 15 o sumamos el opuesto de 15)
$5x = 2x - 12$	(realizo las operaciones)
$5x - 2x = -12$	(sumamos el opuesto de $2x$ o restamos $2x$)
$3x = -12$	(realizo las operaciones)
$(3x) \div 3 = (-12) \div 3$	(dividimos ambos miembros por 3)
$x = -4$	(realizo las operaciones)

Por lo tanto, $x = -4$ es la solución de la ecuación dada, pues si reemplazamos en ella se verifica la igualdad: $5(-4+3) = 2(-4) + 3 \quad \rightarrow \quad 5(-1) = -8 + 3 \quad \rightarrow \quad -5 = -5$.

Nota: Para asegurar que el valor encontrado es la solución buscada, es conveniente verificar en la ecuación original. A la solución también se le llama **raíz de la ecuación**.

2. 3 .1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$a\,x + b = 0 \text{ con } a \neq 0,\ a,b \in R \qquad \textbf{(1)}$$

Se llama de **primer grado** porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia uno.

Ejemplos:

1.- Consideremos la ecuación $x - 2 = 5x - 3$**,** no es de la forma **(1)**, pero operando algebraicamente obtenemos $4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$ que es la **solución** de la ecuación.
Queda para el lector verificar que efectivamente es la solución de la ecuación dada.

2.- Sea $x = x - 3$, operamos y obtenemos $0x = -3$, no existe ningún número real x que satisfaga la igualdad. Por lo tanto, esta ecuación **no tiene solución.**

3.- Expresiones como: $x = x$ ó $3x - 2 = 2(x-1) + x$, **tienen infinitas soluciones**, son ciertas para cualquier número real, son identidades.

EJERCICIOS

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 1 = 2 - 4x$

b) $22x - 7x - \frac{15}{2} = 10 - \left(\frac{7}{2}x - 1\right)$

c) $\frac{2x+1}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2}$

d) $\frac{x+1}{2} = \frac{15x+11}{6}$

e) $6x - 24 = 5(x-4) + x - 4$

f) $25x - 18 = 20 - 5(x+3) + 30x$

g) $[2(x-3)-2]2-4(x-3)=2x-2$ **h)** $2(x-3)+4(x+5)=6$

i) $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$ **j)** $(x-3)x=x^2$

2.- Indicar cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado y luego encontrar su solución.

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{15x+11}{6}$ **b)** $\frac{2}{x+1}=2x+5$

c) $5+x=\frac{2}{x+3}$ **d)** $(x^2-1)(x+1)=0$

3.- a) La suma de tres números enteros consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?
b) Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma es igual a 117.

4.- De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcular la capacidad del depósito en centímetros cúbicos.

---

2 . 3 . 2 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$ax^2+bx+c=0\ ,\ a,b,c\in R\ y\ a\neq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Observamos que la incógnita aparece elevada a la segunda potencia, decimos que la ecuación es **de grado dos** y la llamamos **ecuación cuadrática**.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

Ejemplos:

1.- La expresión $2x+3=5(x-3)$ es una ecuación de grado 1, con una incógnita y se llama de **primer grado.**

2.- La expresión $4-x=3x^2+5$ es una ecuación con una incógnita, de grado 2, o de segundo grado.

3.- La expresión $(x+2)(x+3)=0$ es una ecuación de segundo grado porque operando obtenemos: $x^2+5x+6=0$.

4.- La expresión $t(t+1)^2=3(t-7)$ es una ecuación de grado 3, pues operando queda $t^3+2t^2-2t+21=0$.

Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos raíces. Veamos algunas resoluciones sencillas mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

1.- a) $4x^2=400$, mediante operaciones algebraicas obtenemos: $x^2=10^2$ y aquí recordamos la propiedad de los números $\sqrt{x^2}=|x|$, con lo cual obtenemos: $x_1=10$ y $x_2=-10$, que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.

b) $21x^2 = 400$, completamos mediante operaciones algebraicas para obtener las raíces: $x_1 = \sqrt{400/21}$ y $x_2 = -\sqrt{400/21}$ y racionalizando resulta: $x_1 = \frac{20\sqrt{21}}{21}$ y $x_2 = \frac{-20\sqrt{21}}{21}$

2.- $t(t-10) = 0$, observamos que el primer miembro es un producto de dos factores: *t* y *t* - 10. Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores es cero. En nuestro caso: *t*(*t* - 10) = 0, implica *t* = 0 ó *t* - 10 = 0, de donde se obtiene, *t* = 0 ó *t* = 10 . Por lo tanto, las raíces buscadas son: $t_1 = 0$ y $t_2 = 10$.

3.- $x^2 + 10x + 8 = 0$, en este caso no es sencillo despejar la incógnita para encontrar las raíces, debemos aplicar la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Considerando la ecuación general de segundo grado, **(2)**, las soluciones se encuentran usando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{(3)}$$

Identificamos los coeficientes *a, b y c,* de la siguiente manera: *a* el coeficiente del término cuadrático, *b* coeficiente del término lineal y *c* el término independiente. En este ejemplo, *a* = 1, *b* = 10 y *c* = 8.

La deducción de la fórmula es la siguiente:

$ax^2 + bx + c$	$= 0$,	sumamos a ambos miembros $-c$,
$ax^2 + bx$	$= -c$	multiplicamos a ambos miembros por $4a$,
$4a^2x^2 + 4abx$	$= -4ac$	sumamos a ambos miembros b^2,
$4a^2x^2 + 4abx + b^2$	$= b^2 - 4ac$	el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto,
$(2ax + b)^2$	$= b^2 - 4ac$	aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros,
$\sqrt{(2ax + b)^2}$	$= \sqrt{b^2 - 4ac}$	por definición de valor absoluto,
$\lvert 2ax + b \rvert$	$= \sqrt{b^2 - 4ac}$	entonces,
$2ax + b$	$= \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$	

En consecuencia, despejando *x*, tenemos la fórmula (3) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El doble signo en la fórmula antes de la raíz cuadrada, nos proporciona las dos soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Ejemplos: Encontrar las dos raíces de las ecuaciones de segundo grado:

1.- $x^2 + x - 6 = 0$, aplicando la fórmula **(3)**, tenemos $a = 1$, $b = 1$ y $c = -6$ y reemplazando en **(3)** obtenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -3$.

2.- $9x^2 + 6x + 1 = 0$, análogamente observando la ecuación tenemos: *a* = 2, *b* = 6 y *c* = 1, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}$$

cuyas soluciones son: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$

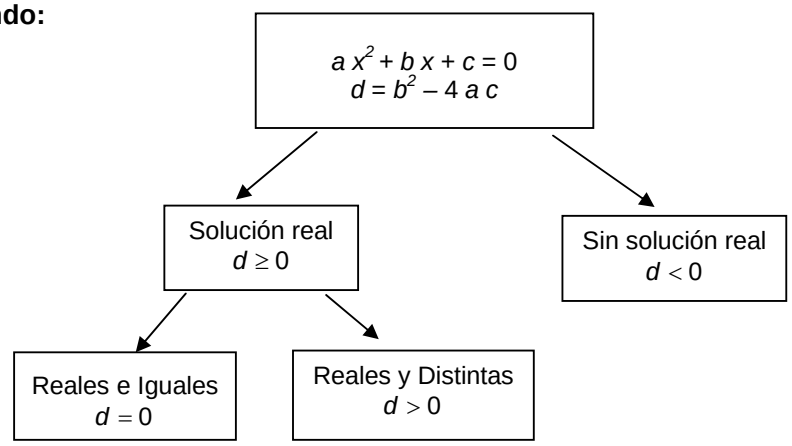
3.- $x^2 - 2x + 5 = 0$, finalmente aquí tenemos: $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, por lo tanto reemplazando en **(3)**:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

como recordamos la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real.
Analicemos cada una de las soluciones de los tres ejemplos anteriores. En el primero observamos que tiene dos raíces reales distintas, en el segundo, las raíces son reales e iguales y el último no tiene solución real.

Analicemos el radicando de la fórmula **(3)**, llamado **discriminante.** Sea $d = b^2 - 4ac$, si d < 0 no tiene solución real; si $d > 0$ tiene raíces reales distintas, y si $d = 0$, las raíces reales coinciden.

Resumiendo:



EJERCICIOS

1: Dadas las ecuaciones:

a) $9 = 5y - 3$; **b)** $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$; **c)** $6y + 5 = 2y + 7$ **;** **d)** $3x^2 - 6 = (x+2)(x-3)$ y las soluciones: -0.5; -3; 2.4 ; $1/2$; 0, $-1/2$, averiguar a cuál ecuación corresponde cada solución y determinar el grado que tiene cada ecuación.

2.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado pero previamente identificar si son o no completas:

a) $2t^2 + 4t - 6 = 0$ **b)** $(t+7)(t-1) + (t+1)^2 = 0$ **c)** $x^2 - x - 2 = 0$

d) $(v+7)(v-3) = 0$ **e)** $t^2 + 4t = 0$ **f)** $t^2 - 1 = 0$

3.- Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **b)** $2t^2 - 4t + 1 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 6 = 0$

4.- Utilizando el discriminante decir qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ **b)** $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 2x + 14 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

5.- a) Efectuar el producto $(x - 4)\,(x - 3)$.

b) Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

c) ¿Existe alguna relación entre los coeficientes –7 y 12 con las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$?

6.- Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ *con* $b, c \in R$ cuyas raíces son x_1 y x_2 , demostrar: $x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$.

7.- El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4 .¿Cuál es el número?

8.- ¿Cuál es el número cuyo triple supera en dos a su cuadrado?

---

2 . 3 . 3 Ecuaciones con dos incógnitas

Ya hemos visto ecuaciones del tipo $ax + b = 0$ (de primer grado con una incógnita) y ahora veremos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, del tipo $a\,x + b\,y + c = 0$ con $a, b, c \in R$. Tiene como solución un par de valores (x,y) que la satisfacen. A este tipo de ecuaciones también se las suele llamar **ecuaciones lineales**. La linealidad viene dada por que ambas incógnitas están elevadas a la potencia uno y no se multiplican entre sí.

Ejemplos:

1.- $x - 2y = 0$ es una ecuación lineal en dos variables: x e y , tiene infinitas soluciones, como por ejemplo: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5/2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ etc.

o también se pueden escribir como par ordenado: $(4, 2)$; $(5, 5/2)$; $(-2, -1)$; $(-4, -2)$

2.- Al determinar las fuerzas F_1 *y* F_2 que actúan sobre una viga, podemos encontrar una ecuación tal como $2F_1 + 4F_2 = 200$ que tiene como soluciones:

$\begin{cases} F_1 = 99 \\ F_2 = 1/2 \end{cases}$; $\begin{cases} F_1 = 80 \\ F_2 = 10 \end{cases}$, etc.

3.- Las expresiones $\frac{3}{x} + 4y = 1$ y $x \cdot y = 1$ no son lineales.

4.- La expresión $x^2 + y^2 = 36$ es una ecuación de segundo grado en dos variables, que es la ecuación de la circunferencia de radio 6 y centro en (0, 0). Cada punto P(x, y) de la circunferencia es solución de la ecuación. Como la circunferencia tiene infinitos puntos, la ecuación dada tiene infinitas soluciones.

En el capítulo 6 retomaremos el tema de ecuaciones lineales.

2 . 4 Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas

Ejemplo:

Un comercio vende calculadoras aritméticas a $7.50 y científicas a $18.00. Cierto día el comercio vendió 16 calculadoras por un importe total de $193.50. ¿Cuántas calculadoras eran aritméticas?

Primero identificamos que hay dos tipos de calculadoras en venta, si llamamos x a la cantidad de calculadoras aritméticas e y a la cantidad de calculadoras científicas, podemos traducir el problema al lenguaje algebraico de la siguiente manera: $x + y = 16$ que es el total de calculadoras vendidas y por otro lado el monto total vendido: $7.50\,x + 18.00\,y = 193.50$.

Estas ecuaciones determinan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 7.50\,x + 18.00\,y = 193.50 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

resolverlo, significa encontrar valores para las incógnitas *x* e *y* que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.
Despejamos indistintamente *x* ó *y* de la primera ecuación, por ejemplo

$$x = 16 - y \qquad \textbf{(2)}$$

a esta expresión la reemplazamos en la segunda ecuación $7.50(16 - y) + 18.00\,y = 193.50$, operando algebraicamente: $120 + 10.50y = 193.50 \;\rightarrow\; y = 7$, llevamos este valor a **(2)** y obtenemos $x = 9$.
Esta es la supuesta solución del sistema, para estar seguros debemos verificar los valores en ambas ecuaciones de **(1)**, es decir,

$$\begin{cases} 9 + 7 = 16 \\ 7.50 \cdot 9 + 18.00 \cdot 7 = 193.50 \end{cases}$$

Por lo tanto, el par $(x,\, y) = (9,\, 7)$ es solución matemática del sistema. La respuesta al problema es:
Respuesta: El negocio vendió 9 calculadoras aritméticas.

Los sistemas lineales aparecen frecuentemente en situaciones de la física, química, ciencias naturales, etc. como también en ciencias humanas y sociales, (economía, psicología, sociología).
Hay métodos convencionales de resolución de sistemas lineales: **Sustitución**, **Eliminación (o Reducción por suma o resta)** e **Igualación**. Estos métodos se basan en una secuencia de operaciones elementales. Además hay otros métodos: Gauss, Regla de Cramer (o Determinantes) .
Otra cuestión para resaltar es que a los sistemas sencillos de dos y tres variables por lo general es más fácil de resolverlos por los métodos convencionales, pero para un sistema de más de tres variables es conveniente utilizar otros métodos.
Repasaremos dos métodos de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlos, es encontrar la solución, es decir, el valor de las incógnitas, para ello se siguen ciertas técnicas que dependen de la situación de cada sistema, pues cualquier método de resolución de sistemas es válido, ya que proveen la misma solución.

2. 4 .1 Método de Sustitución

Como su nombre lo indica, se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, es la manera más natural de resolver un sistema. Los **pasos a seguir** para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son:

1.- Elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas en términos de la otra, en general, es la incógnita más fácil de despejar.

2.- Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y nos queda una ecuación en una incógnita y se resuelve.

3.- Luego, llevamos este resultado a la ecuación despejada en el paso **1** para obtener la otra incógnita.

4.- Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplos:

1.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$.

Paso 1: Después de observar ambas ecuaciones, podemos despejar y de la primera ecuación:

$$2x+3y=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1-2x}{3}. \qquad \textbf{(1)}$$

Paso 2: Reemplazamos ahora en la segunda ecuación: $2x-6\left(\frac{1-2x}{3}\right)=2$

Nos queda una ecuación de primer grado en una incógnita, cuya solución es: $x=2/3$.

Paso 3: El y correspondiente lo obtenemos sustituyendo este valor de x en **(1)**: $y=\frac{1-\frac{4}{3}}{3}=-\frac{1}{9}$. Por la tanto: $(x_o, y_o)=(2/3, -1/9)$.

Paso 4: Sustituimos $(2/3, -1/9)$ en ambas ecuaciones, para verificar que es solución:

$$\begin{cases} 2\frac{2}{3}+3\left(-\frac{1}{9}\right)=1 \\ 2\frac{2}{3}-6\left(-\frac{1}{9}\right)=2 \end{cases} \text{ operando } \begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1 \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2 \end{cases}$$

Como se verifican ambas, la **solución** es: $(x_o, y_o)=(2/3, -1/9)$.

2.- El sistema $\begin{cases} x+0y=4 \\ 0x+y=5 \end{cases}$, tiene **solución única**: $(x_o, y_o)=(4, 5)$, pues es evidente que verifica ambas ecuaciones. El **sistema es determinado**.

3.- Resolver el sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x-y=6 \end{cases}$

Observamos ambas ecuaciones, vemos que es más sencillo despejar y de la segunda: $y=5x-6$, llevamos esta expresión a la primera ecuación: $3x-2(5x-6)=5$; operando algebraicamente obtenemos: $x=1$, sustituimos este valor de x en la expresión despejada de y: $y=5.1-6=-1$. Por lo tanto, la solución aparente que obtuvimos es: $(x, y)=(1, -1)$.
Verifiquemos si es solución del sistema, para ello reemplazamos el par obtenido en ambas ecuaciones: $\begin{cases} 3.1-2(-1)=5 \\ 5.1+1=6 \end{cases}$, efectivamente se cumplen las dos igualdades, esto quiere decir que la **única solución** es: $(x, y)=(1, -1)$.

Queda para el alumno identificar los pasos sugeridos.

4.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$

Después de observar ambas ecuaciones vemos que es indistinto la incógnita a elegir para despejar, por ejemplo, nos decidimos por la primera ecuación: $x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}$ y la reemplazamos en la segunda: $4\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 5y = 3$, resolviendo tenemos $y = -1$, ahora llevamos este valor a la expresión despejada de x : $x = \frac{3}{2}(-1) + \frac{7}{2} = 2$, luego la supuesta solución es $(x, y) = (2, -1)$.
Queda para el lector verificar el paso 4 y resolver el sistema nuevamente despejando la incógnita *y.*

Los cuatro ejemplos anteriores muestran **sistemas con solución única**, veamos ahora el siguiente ejemplo:

5.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación $y = 4 - 2x$, reemplazamos en la segunda ecuación, $-6x - 3(4 - 2x) = -12$, operando obtenemos $0x = 0$, esta igualdad se cumple para cualquier valor de x , es decir, el sistema tiene **infinitas soluciones**, por ejemplo: $(0, 4); (\frac{1}{2}, 3); (2, 0)$; etc... son soluciones.
Si observamos detenidamente el sistema, vemos que la primera ecuación multiplicada por -3, es igual a la segunda, esto nos dice que en realidad tenemos una sola ecuación con dos incógnitas.
Por lo tanto, en forma general la solución del sistema se puede expresar como $(t\ ,\ 4 - 2t)$, donde t es un número real. Para cualquier número real que se asigne a t, obtenemos el valor de y correspondiente, en este caso, se dice que el sistema es **indeterminado**.

6.- Resolver el sistema $\begin{cases} 6x + 10y = 8 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$
Observamos que las dos ecuaciones son prácticamente la misma, pues si a la primera la dividimos por 2 tenemos una sola ecuación, por lo tanto tiene infinitas soluciones.
También en este caso se dice que el sistema es indeterminado. Operando se llega a una expresión del tipo $0.x = 0$ ó $0.y = 0$, válida para todo valor de x ó de y. Es decir, las **infinitas soluciones**: $(x\ ,\ y) = \left(x\ ,\ \frac{\frac{4}{3} - 5x}{3}\right)$ de una ecuación también lo son de la otra.
En los seis ejemplos anteriores los **sistemas son compatibles o consistentes**, porque todos tienen solución.
A continuación veremos dos ejemplos con otras características:

7.- Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = -2x + 5$ y la reemplazamos en la segunda: $4x + 2(-2x + 5) = 8$, resolviendo obtenemos: $0x = -2$, ¡¡absurdo!!, luego el sistema **no** tiene solución o también se dice que el **sistema es incompatible o inconsistente**.

8.- Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

Es imposible encontrar una misma solución para ambas ecuaciones, nuevamente se dice que el sistema no tiene solución o que es incompatible (inconsistente) y en este caso se llega operando a una expresión del tipo $0x = 2$ ó $0y = 2$.

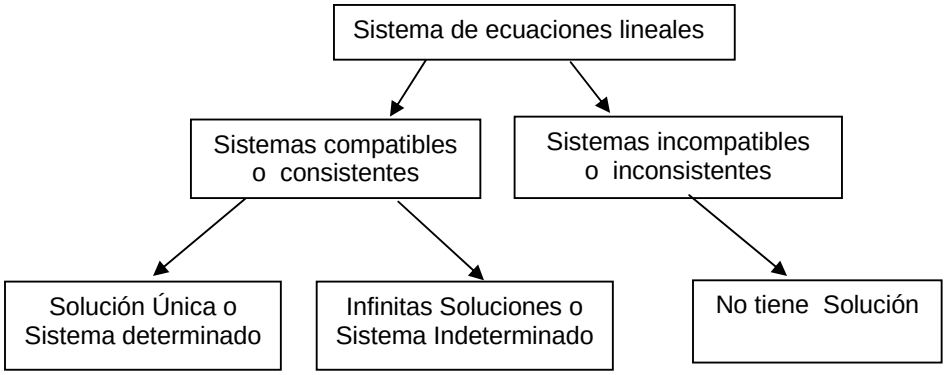
Resumiendo: Dados $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$, hemos analizado sistemas del tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Resolver un sistema de ecuaciones **(1)**, es encontrar un par (x_o, y_o) que será solución del sistema si y sólo si, verifica **ambas** ecuaciones **simultáneamente**, es decir,

$$\begin{cases} a_1x_o + b_1y_o = c_1 \\ a_2x_o + b_2y_o = c_2 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

El sistema **(1)** puede tener una ó infinitas soluciones ó no tener solución. Estos resultados podemos resumirlos en el siguiente cuadro:



EJERCICIOS

1.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 78 \\ 4x + y = 54 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ x/5 = y/4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 6x + 5y = -1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -3x + 7y = 4 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}y = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

2.- El perímetro de un rectángulo mide 17 *cm* y su base mide 0.1 *dm* más que el doble de la altura. Se quiere averiguar cuales son las medidas en metros del rectángulo.

3.- La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble de primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son los números?

4.- Se necesitaron 30 *Km* de cerca para un campo rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 *Km*?

---

2. 4. 2 Método de Reducción por suma o resta o de Eliminación

Recordemos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjuntos solución.
El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente. En esencia consiste primero en ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, si no es así se trata de acomodar para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos , esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Los **pasos a seguir** son:

1.- Preparamos ambas ecuaciones, multiplicando (dividiendo) por una constante (número) adecuada para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, salvo signo que puede ser positivo (o negativo), en ambas ecuaciones.

2.- Restamos (o sumamos), según signo del coeficiente, miembro a miembro ambas ecuaciones y con ello desaparece una incógnita, así reducimos el número de ecuaciones, en nuestro caso a una ecuación.

3.- Resolvemos la ecuación obtenida.

4.- Luego a este resultado lo llevamos a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener la otra incógnita (o podemos emplear la misma técnica para despejar la otra incógnita).

5.- Verificar la solución obtenida, en ambas ecuaciones.

Ejemplos: Resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

a) Después de observar el sistema vemos que *x* tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, por lo tanto restando miembro a miembro obtenemos la ecuación: $y + 5y = 6$ de donde *y* =1, finalmente reemplazado en la primera ecuación resulta *x* = 2.

Verificación: $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \end{cases}$; luego, la solución única es: $(x,\ y) = (2,\ 1)$

b) En este ejemplo después de observar el sistema, tenemos dos posibilidades:

Primero: Igualamos los coeficientes de *x* multiplicando por 2 la primera ecuación:
$\begin{cases} 4x + 6y = 38 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$, restamos miembro a miembro y obtenemos $y = 3$.
Ahora multiplicamos la segunda ecuación por 3, para igualar los coeficientes de *y* : $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 12x + 3y = 69 \end{cases}$, restando miembro a miembro tenemos *x* = 5.

Verificación: $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 4 \cdot 5 + 3 = 23 \end{cases}$; luego la solución única es: $(x,\ y) = (5,\ 3)$

Segundo: En la primera ecuación podemos igualar los coeficientes de *y,* si dividimos por 3:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = \frac{1}{3} \\ 4x + y = 23 \end{cases}$$

Queda para el lector completar el ejemplo y verificar que se obtiene la misma solución.

b) En este sistema las incógnitas no tienen coeficientes iguales ni tampoco múltiplos uno del otro, por lo tanto, tenemos dos opciones para resolverlo: elegir el método de sustitución o el método de reducción. Lo haremos por este último.

Primero: Tratamos de igualar los coeficientes de *x*, para ello procedemos de la siguiente manera, multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por 3: $\begin{cases} 15x - 30y = 10 \\ 15x + 12y = 3 \end{cases}$, ahora restamos miembro a miembro: $42y = -7$, es decir, $y = -1/6$, finalmente miramos el sistema dado y vemos que nos conviene reemplazar en la primera ecuación y obtenemos el valor de $x = 1/3$. Queda para el lector la verificación de que la solución única es: $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

Segundo: Podríamos haber elegido de igualar los coeficientes de *y,* multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3: $\begin{cases} 6x - 12y = 4 \\ 15x + 12y = 3 \end{cases}$, sumando miembro a miembro resulta $x = 1/3$.

Queda para el lector encontrar el valor de *y* por este segundo camino. Escribir la solución y verificarla.
Además, COMPLETAR LOS PASOS INTERMEDIOS DE LOS TRES EJEMPLOS.

EJERCICIOS

1.- Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x - y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$

2.- Dos amigos fueron de visita a una granja en la que había pavos y corderos. Al salir uno de ellos le pregunto al otro: "¿Cuántos pavos y corderos había? Averígualo, vi 72 ojos y 122 patas".

3.- En un hotel hay habitaciones simples y dobles. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene el hotel?

4.- Un cine vende boletos a 8$ cada uno pero, a las personas de la tercera edad se les hace un descuento de 2$. En una tarde, el cine vendió 525 boletos y recaudó 3580$. ¿Cuántos boletos vendió de cada tipo?

5.- El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 *cm*. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuáles son las medidas de los lados en metros?

---

2 . 5 Cómo plantear y resolver Problemas

A lo largo del desarrollo de esta unidad hemos visto problemas sencillos, en esta sección veremos gran cantidad de problemas resueltos para que tengamos al menos una base y técnicas para resolverlos.
En los problemas nos planteamos la o las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas. Lo difícil es identificar la información que nos lleva a la ecuación que debemos resolver, esto se debe a menudo, a que parte de la información se infiere, pero no está explícitamente establecida.
A continuación mostraremos la forma en que se utilizan las expresiones algebraicas para plantear y resolver ecuaciones lineales y /o cuadráticas en alguna de sus aplicaciones. Son ellas y sus soluciones de gran importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una de las aplicaciones más importantes se presenta en matemáticas, física, ingeniería y otros campos.

2.5.1 Pasos útiles para resolver problemas

I.- COMPRENDER EL PROBLEMA
II.- CONCEBIR un plan
III.- EJECUTAR el plan
IV.- EXAMINAR la solución obtenida

I.- COMPRENDER el problema:

- Leer el enunciado. Señalamos cuáles son los datos, qué es lo que se conoce del problema.
- Elaboramos, si es necesario, un mapa conceptual o un esquema de la situación.
- Encontramos la relación entre los datos y las incógnitas.
- Introducimos una notación adecuada.
- Si hay alguna figura relacionada con el problema, la dibujamos.

En síntesis, debemos plantearnos las siguientes preguntas:
¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición que relaciona los datos con las incógnitas? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Es redundante? ¿Es contradictoria?

II.- CONCEBIR un plan:
"Tenemos un plan cuando sabemos, al menos a grosso *modo*, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita".
Para concebir un plan debemos tener claro si nuestros conocimientos son suficientes, puesto que es imposible resolver un problema si desconocemos por completo el tema del cual trata.
Con frecuencia es adecuado abordar un problema planteándonos las siguientes preguntas:
¿Hemos resuelto un problema semejante? o ¿Hemos visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conocemos un problema relacionado con éste?.
Si no podemos resolver el problema propuesto tratamos de resolver primero algún problema similar más sencillo que nos aporte información para el nuestro.

III.- EJECUTAR el plan:

Esta etapa también hay que plantearla de una manera flexible, alejada de todo mecanicismo. Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal, que necesariamente se van a producir saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos. ¿Se puede ver claramente qué cada paso es correcto? Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con ésto? Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.
Cuando tropezamos con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:
Supone:
Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se debe poner atención en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
¿Es posible comprobar la solución?
¿Es posible encontrar alguna otra solución?

Siguiendo estos cuatro pasos podremos tener una buena idea y base para pensar acerca de cómo encarar distintas situaciones problemáticas y adquirir más habilidad para resolverlos no solo aquí, sino nos serán útiles cuando se nos presenten a lo largo de la carrera y por lo tanto estaremos mejor preparados.

Ejemplo 1

Un lado de un triángulo isósceles mide 3 *cm* menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 *cm*. ¿Cuánto mide cada lado?

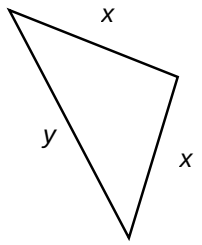
Solución:

I.- COMPRENDER el problema

a) Primero leemos el problema y determinamos que nos pide. Es decir, ubicamos cuál o cuáles son las incógnitas e introducimos la notación, por ejemplo x . Acá representa la longitud de uno de los dos lados iguales del triángulo e y al lado desigual.

b) Consideramos los datos:

Uno de los datos que tenemos es que el lado desigual mide 3*cm* menos que la suma de los lados iguales, es decir, $y = 2x - 3$ y el otro dato es que el perímetro es de 33*cm*, es decir, $2x + y = 33$



II.- CONCEBIR un plan

De acuerdo al punto **I**, vemos que obtuvimos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y = 33 \end{cases}.$$

III.- EJECUTAR el plan:

Es resolver dicho sistema de ecuaciones por cualquier método. Obtenemos $x = 9$ e $y = 15$, que es la solución matemática del sistema.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:

Verificamos que la solución matemática es la solución del problema: Según la notación que adoptamos los lados iguales miden 9 *cm* y el tercer lado 15 *cm*, luego el perímetro, que es la suma de las longitudes de los tres lados, es: 9 + 9 + 15 = 33, como se verifica el resultado, entonces $x = 9\,cm$ e y = 15 *cm*, es la solución del problema. Finalmente,

Respuesta: Las longitudes de los lados del triángulo son: 9 *cm*, 9 *cm* y 15 *cm*.

Ejemplo 2

En una confitería han preparado 60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo puro de fruta.¿Cuánto jugo puro de ananá deben agregarle para que el refresco contenga el 20% de dicho jugo?

Resolvamos teniendo en cuenta los pasos sugeridos en la página 47:

1- Comprender el problema

- *Lectura comprensiva del texto*
- *¿Cuál es la incógnita?.*

Cantidad de jugo de ananá que deben agregarle a los 60 litros de refresco para que resulte uno con el 20% de jugo puro de ananá.

- *¿Cuáles son los datos?*

60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo de fruta.

2- Concebir un plan.

Sea “x” la cantidad (medida en litros) de jugo de ananá que debe agregarse.

Hacemos una tabla que representa las relaciones entre los datos y la incógnita:

	Tengo	Agrego jugo puro	Obtengo
Cantidad en litros de refresco	60	x	60 + x
Concentración de jugo puro de ananá	10%	100%	20%
Cantidad de jugo puro de ananá en litros	10% de 60 = 6	100% de x = x	20% de (60+x)= 0.2 (60+*x*)

El aspecto clave para convertir la información de la tabla en una ecuación, es observar que la cantidad total de jugo puro de ananá en la nueva mezcla debe ser igual a la que ya contenía más la que se agrega:

$$0.2(60+x)=6+x$$

3- Ejecutar el plan

Resolviendo la ecuación planteada obtenemos:

$$\begin{aligned} 6+x &= 12+0.2x \\ x-0.2x &= 12-6 \\ 0.8x &= 6 \\ x &= \frac{6}{0.8} = 7.5 \end{aligned}$$

Respuesta: Se debe agregar 7.5 *l* de jugo puro de ananá para que el refresco tenga una concentración del 20%.

4 - Examinar la solución obtenida

El comerciante va a obtener 67.5 *l* de refresco de ananá, el cual tiene la cantidad de 13.5 *l* de jugo puro, 6 litros antes de la mezcla más el agregado de 7.5 litros. Por otro lado, debemos verificar si los 13.5 *l* responden a la concentración pedida:

20% de (67.5) es 13.5 *l*.

Por lo cual podemos afirmar que la nueva cantidad de refresco que tiene el comerciante responde a lo pedido.

En los ejemplos que siguen, los cuatro pasos sugeridos en la resolución de problemas no los detallamos. Aconsejamos al lector resolver los ejemplos usando esta técnica antes de mirar la solución.

Ejemplo 3

Una máquina tiene una masa de 17 *Kgr*. Si está compuesta por dos partes y una de ellas pesa 3 *Kgr* más que la otra. ¿Cuáles son las masas respectivas?

Solución:

El problema nos pide calcular la masa de cada una de las partes que integran la máquina.
Sea m_1 = masa de la parte más liviana, con lo que hemos establecido una de las incógnitas (o también podríamos haber representado con ella a la parte más pesada o haber utilizado cualquier otra letra).
Además, como “una de ellas tiene una masa de 3 *Kgr* más que la otra”, podemos escribir: $m_2 = m_1 + 3$.

Como las dos masas juntas pesan 17 *Kgr*, tenemos: $m_1 + m_2 = 17$, reemplazamos m_2 en esta expresión, obtenemos: $m_1 + m_1 + 3 = 17 \quad \rightarrow \quad 2m_1 = 14 \quad \rightarrow \quad m_1 = 7$.
La solución del problema es:

Respuesta: La masa más liviana pesa 7 *Kgr* y la más pesada 10 *Kgr*

Ejemplo 4

Una solución de alcohol y agua contiene 2 *l* de alcohol y 6 *l* de agua. ¿Cuánto alcohol puro se debe añadir a esta solución para que la solución resultante tenga $\frac{2}{5}$ de alcohol?

Solución:

Llamemos *x* al número de litros de alcohol que debemos añadir a la solución cuyo volumen es de 8 *l* .
La cantidad final de alcohol que tendremos será: $2 + x$ y el volumen de la mezcla resultante será: 8+*x*. Por lo tanto el volumen de alcohol final comparado con el volumen total correspondiente de la mezcla debe ser: $\frac{2}{5}$. Esto significa: $\frac{2+x}{8+x} = \frac{2}{5}$, de donde *x* = 2.

Respuesta: Se debe añadir 2 litros de alcohol a la solución.

Queda para el lector verificar que hay que añadir 2*l* de alcohol puro a la solución original para tener 4*l* de alcohol en el volumen total de 10 *l*.

Ejemplo 5

Juan compró en enero de 2001 acciones en una empresa. En la misma fecha del 2002, las acciones habían bajado un 4%, pero su precio en enero de 2003 era un 10% superior al del año anterior. Hallar el porcentaje de variación de precio del 2003 respecto de la compra.

Solución:

Si el precio de las acciones en el 2001 fue de *x* pesos. El precio en el 2002 disminuyó en un 4% (0.4 pesos). Por lo tanto el precio de las acciones fue: $x - 0.4\ x = 0.96\ x$. En el año 2003, las acciones aumentaron un 10% respecto de $0.96\ x$, es decir, $0.1 \cdot 0.96\ x = 0.096\ x$. Por lo tanto, el precio final es de: $0.96\ x + 0.096\ x = 1.056\ x$.
El problema nos pide el porcentaje que varió el precio actual respecto del precio de compra, es decir, nos pide: $\frac{precio\,2003 - precio\,2001}{precio\,2001} \cdot 100\,\% = 5.6\,\%$.

Respuesta: El porcentaje de variación es de 5.6%.

Ejemplo 6

Dos inversiones que totalizan $ 18000 producen un ingreso anual de $ 700. Si la primera inversión tiene una tasa de interés de 5.5% y la segunda de 3.0%. ¿Cuál es el monto de cada una de las inversiones?

Solución:

Llamamos *x* = al monto de la primera inversión e *y* = el monto de la segunda. Sabemos que el total es: $x + y = 18000$. Además que la primera produce anualmente: $0.055\,x$ y la segunda:

$0.03\,x$. Todo esto nos lleva al sistema: $\begin{cases} x + y = 18\,000 \\ 0.055\,x + 0.03\,y = 700 \end{cases}$ cuya solución matemática es: $(x\,,\ y) = (6400\ ,\ 11600)$ y la solución del problema es:

Respuesta: Las inversiones son de $ 6400 y $ 11600 respectivamente.

Ejemplo 7

Un carro hace en dos horas un viaje de ida y vuelta a una ciudad que dista a 72 *Km*. Si la velocidad promedio en el viaje de regreso es de 30 *Km/h* menor que en el viaje de ida. ¿Cuál es la velocidad promedio del carro al ir a la ciudad?

Solución:

Sea v = velocidad promedio de ir a la ciudad y t = tiempo empleado para llegar a la ciudad. Con esta elección de incógnitas tenemos $v \cdot t = 72$ (la distancia es igual a la velocidad por el tiempo). Además sabemos que la velocidad de regreso fue $v - 30$ y que el tiempo requerido para dicho viaje fue $2 - t$.
Como la distancia recorrida al regresar fue de 72 *Km,* podemos escribir que $(v - 30)\,(2 - t) = 72$, como deseamos obtener v eliminamos t y nos queda: $(v - 30)\left(2 - \dfrac{72}{v}\right) = 72$, de donde obtenemos la ecuación de segundo grado: $v^2 - 102\,v + 1080 = 0$, cuyas soluciones matemáticas son: $v_1 = 90$ y $v_2 = 12$.
Veamos cual de las dos raíces matemáticas es solución del problema. La raíz $v_2 = 12$ no puede ser solución, por que la velocidad de retorno, que es 30 *Km/h* menor que la de ida, sería negativa. Por lo tanto la solución es $v_1 = 90$ *Km/h*. Queda para el lector verificar que efectivamente cumple las condiciones del problema.

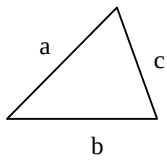
Respuesta La velocidad promedio es de 90 *Km /h*

Ejemplo 8

Un triángulo tiene perímetro de 37*cm.* El lado mayor tiene 3 *cm* más que el que le sigue en longitud, el cuál a su vez tiene 8 *cm* más que el lado más corto. Hallar las longitudes de cada lado en metros.

Solución:

Primero construimos una figura que nos ayuda a visualizar e interpretar el problema.
Sea a = longitud del lado mayor, b = lado siguiente y c = lado más corto.
Puesto que el perímetro es 37 *cm*, tenemos que : $a + b + c = 37$.



Por otro lado las condiciones del problema nos llevan a las siguientes ecuaciones: $a = b + 3$ y $b = c + 8$, de donde obtenemos:
$\begin{cases} a + b + c = 37 \\ a - b = 3 \\ b - c = 8 \end{cases}$ sumando la primera con la tercera reducimos el sistema a: $\begin{cases} a + 2b = 45 \\ a - b = 3 \end{cases}$,
restando miembro a miembro nos queda $b = 14$, reemplazando obtenemos $a = 17$ y $c = 6$.
Respuesta: Los lados del triángulo miden 0.17 *m*, 0.14 *m* y 0.06 *m*

EJERCICIOS

1.- Pasó un gavilán por un palomar y dijo: “Adiós palomar de 100 palomas”. Una paloma le contesta: “Miente usted gavilán. Con éstas, otras tantas como éstas, la cuarta parte de éstas y usted gavilán, el ciento serán”. ¿Cuántas palomas había?

2.- En un aula disponiendo 9 alumnos por banco quedan 3 alumnos sin asiento y disponiendo 10 por banco quedan 5 lugares vacíos. Encontrar el número de bancos y de alumnos.

3.- ¿Cuántos gramos de plata pura deben añadirse a 36 *grs* de plata al 60% para obtener una aleación de plata al 76%.

4.- Si considero 3 veces los años que tendré dentro de 3 años y le resto 3 veces los años que tenía hace 3 años resulta exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tengo?

5.- ¿Cuál es la longitud de una varilla si su quinta parte es roja, hay dos tercios pintados de blanco y restan aún dos metros por pintar?

6.- La diagonal de una granja cuadrada tiene 10 *km* más que uno de sus lados. ¿Cuál es la longitud del lado de la granja ?

7.- Un laboratorio químico tiene dos recipientes con soluciones diferentes. Uno contiene una solución al 10% de ácido nítrico (HNO_3) y el segundo al 30%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 25%?.

2.6 PRÁCTICO: LENGUAJE ALGEBRAICO Y ECUACIONES

Ejercicio 1: Decir si las siguientes igualdades son ecuaciones y en caso afirmativo encuentre sus raíces:

a) $3\ x+5=2\ x+10$

b) $4x^2-2x-3=3x^2-4x$

c) $x+\ 4=4(x-26)$

d) $3x^2-3x+7=3(x^2+2x)-9x+7$

Ejercicio 2: Resolver las siguientes ecuaciones y decir qué grado tienen:

a) $4x-1=2-4x$

b) $22x-7x-15/2=10-\left(\frac{7}{2}x-1\right)$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $(x^2-x+1)-(x+1)^2=3-\frac{3}{2}x$

e) $4x^2+12x+9=0$

f) $2x^2+x+9=(x+4)(x+1)$

Ejercicio 3: Responder con verdadero [V] o falso [F] a las siguientes proposiciones:

a)	$-2x=8$	$\rightarrow$	$x=-4$	.....	
b)	$\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+1$	$\rightarrow$	$2x=3x+1$	.....	
c)	$10x=7$	$\rightarrow$	$x=1/7$	.....	
d)	$7\cdot x=0$	$\rightarrow$	$x=0$	.....	
e)	El número cero no puede ser solución (raíz) de una ecuación				
f)	La ecuación $\frac{5}{x}=\frac{4}{x}$ no tiene solución				
g)	$x^2+2x+1=0$	$\rightarrow$	$x_1=x_2$	.....	
h)	$3x^2+4x-3=0$	$\rightarrow$	No tiene solución real		
i)	$4x^2+12x+3=0$	$\rightarrow$	$x_1\neq x_2$	.....	
j)	$-2x^2+3x+1=0$	$\rightarrow$	$x_1\neq x_2$	.....	

Ejercicio 4: Despejar *x* en las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=2$

b) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+5}{a-5}\ \ (a\neq 5)$

c) $\frac{x-3}{2}-\frac{(x-2)^2}{2x}+\frac{3}{2}=0$

d) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+2}$

Ejercicio 5: Resolver y comprobar las soluciones (raíces) de las siguientes igualdades:

a) $x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-x\right)$

b) $\frac{3x+2}{8}=\frac{1-x}{5}$

c) $x-\frac{x+2}{6}=\frac{3x}{4}+2$

d) $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

e) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}=1$

f) $\frac{6}{x}-\frac{3}{4x-5}=\frac{2}{3x}$

Ejercicio 6: Resolver, pero antes pensar si se puede simplificar las expresiones siguientes:

a) $\frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$

b) $\frac{3x^2 + 16x + 5}{2x + 10} = 1$

c) $\frac{2}{5}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = 0$

d) $\frac{x^2 - 16}{8} = \frac{x^2 + 7x + 12}{16}$

Ejercicio 7: Resolver las siguientes ecuaciones y verificar la solución obtenida en cada una de ellas. Además, decir que tipo de soluciones y grado tienen las ecuaciones.

a) $33 - 4x = -24 - 7x$

b) $2(x+3)(x-1) - (2x+3)(x+4) = 0$

c) $x^2 - x - 2 = 0$

d) $2(x+3) + 4(x+5) = 6$

e) $x + 12 = 15 + 4x - 2$

f) $4x^2 + 9 = 0$

g) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

h) $5x^2 + 10x = 75$

i) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x - 1) = 0$

j) $(x+5)^2 = 4$

Ejercicio 8: Hallar el valor de *a* de tal manera que la ecuación $\frac{x(1+a)}{a+1} + 1 = a - 1$, tenga como solución $x = 3/4$.

Ejercicio 9: Dada la ecuación: $x^2 - 10x + k = 0$. Hallar *k* y las raíces de la ecuación para los siguientes casos:

a) Una de las raíces es 7

b) Las dos raíces son iguales

Ejercicio 10: Dada la ecuación: $x^2 + ax + 14 = 0$, una de las raíces es 2. Hallar la otra raíz y el valor de *a*.

Ejercicio 11: ¿Para qué valor de *k* la ecuación: $kx^2 - 2kx + 1 = 0$ admite raíces reales iguales? Luego, encontrar las raíces de la ecuación.

Ejercicio 12: Averiguar para que valor de *k* las ecuaciones cuadráticas tiene las raíces indicadas.

a) $x^2 + 24 = kx - 1$ si $x_1 = x_2 = 5$

b) $x^2 + kx - 15 = 0$ si $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$

c) $3x^2 + 2x - k = 0$ si $x_1 = -1$ y $x_2 = 1/3$

Ejercicio 13: Escribir la ecuación de segundo grado, si x_1 y x_2 son sus raíces.

Ejercicio 14: La ecuación cuadrática se distingue por tener el término x^2, entonces

a) Si $a = 0$ ¿existe la ecuación de segundo grado?

b) Si $a \neq 0$ y $b = c = 0$, es decir, $ax^2 = 0$. ¿Es una ecuación de segundo grado?
Justificar las respuestas en cada ítem.

Ejercicio 15: Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces:

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 + 2x + 6 = 0$

Ejercicio 16: a) Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son números opuestos a las de la ecuación $3x^2 - 10x + 2 = 0$ sin resolverla. b) Dada la ecuación: $x^2 - 10x + k = 0$. Hallar *k* y las raíces de la ecuación, si una de ellas es la inversa de la otra.

Ejercicio 17: Escribir la ecuación de segundo grado conocidas sus raíces:

a) raíces reales iguales a 1 **b)** raíces reales distintas: 3 y –3
c) raíces reales distintas: - 2 y 4

Ejercicio 18: Resolver los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + 3y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ x - y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 4x - 1 = y \\ 2x - y = 10 - 2x \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4y = 5 + 2x \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 1 \\ 3y - x = -2 \end{cases}$

Ejercicio 19: Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x = 2[y - (x - y)] \\ x + [x - (x - y)] = 63 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{21}{x} - \frac{10}{y} = 5 \end{cases}$

Ejercicio 20: Hallar el valor de *k* para que el sistema tenga la solución indicada.

a) $\begin{cases} x - 16ky + 5 = 0 \\ 2kx + y = 2 \end{cases}$ $(x_o, y_o) = (1, 1.5)$ **b)** $\begin{cases} 10x + 5ky = -9 \\ x + 2y = 50k \end{cases}$ $(x_o, y_o) = (-1, 2.5)$

Ejercicio 21: Hallar dos números naturales pares consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 100.

Ejercicio 22: Los lados de un rectángulo miden 1 y 2 *m*. ¿Es posible aumentar ambos lados con una misma cantidad para que el área se duplique?

Ejercicio 23: En un rombo de 8*m* de perímetro, una de las diagonales mide el doble de la otra. ¿Cuánto mide su área en centímetros cuadrados?

Ejercicio 24: ¿Cuál es el número cuyo triple supera en 2 a su cuadrado?

Ejercicio 25: La suma de tres corrientes es de 12*A* (Amperes). Si la más pequeña es de 2*A* menos que la siguiente, la que a su vez es 2*A* menos que la mayor. ¿Cuáles son los valores de las tres corrientes?

Ejercicio 26: La corriente eléctrica en una resistencia es tres veces mayor que en otra resistencia. Si la suma de las corrientes es de 0.012*A*. Si el voltaje es constante, ¿cuál es la corriente en cada una de ellas?

Ejercicio 27: A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La contestación fue compleja: tomad 5 veces los años que tenía hace de 3 años, restadle 3 veces los años que tendré dentro 3 años y resultará los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene?

Ejercicio 28: Calcular cuánto miden los lados de una granja rectangular cuyo contorno es de 2100 centímetros y su superficie es de 26 metros cuadrados.

Ejercicio 29: Un hombre que rema a ***v*** *Km/h* cubre 8 *Km* en una hora cuando va a favor de la corriente. Remando dos veces más rápido cuando va en contra de la corriente, puede cubrir solamente 7 *Km* en una hora. Hallar la velocidad original a la que remaba y la velocidad de la corriente.

Ejercicio 30: En cierto circuito eléctrico hay una resistencia *R* de $2\,\Omega$ y un voltaje *E* de 60 *V***.** La relación entre la corriente *i* (en Amperes), *E* y *R* está dada por la expresión: $i^2 R + i E = 800$. ¿Qué corriente *i* $(i > 0)$ fluye por el circuito?

Ejercicio 31: En electrónica la resistencia equivalente a la de dos resistencias conectadas en paralelo está dada por: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Dos resistencias conectadas en serie está dada por: $R = R_1 + R_2$. Si dos resistencias conectadas en paralelo tienen una resistencia equivalente $3\,\Omega$ y ellas mismas en serie una resistencia equivalente a $16\,\Omega$. ¿Cuáles son las resistencias?

Ejercicio 32: Si en una fracción al numerador se la suma 2, la fracción que se obtiene es igual a $\frac{1}{2}$. Por otro lado, si al denominador se le suma 1, la fracción que queda es igual $\frac{1}{3}$. Encontrar la fracción.

Ejercicio 33: La suma de dos números enteros es igual a 100. Si dividimos uno por el otro. El cociente nos da 3 y el resto es 8. ¿Puedes encontrar dichos números?

Ejercicio 34: Juan para ingresar a la universidad debe rendir un examen tipo "test" que consta de 20 preguntas. Por cada respuesta correcta obtiene 0.5 puntos y por cada respuesta incorrecta o no contestada se le resta 0.25. Si luego de corregida la prueba obtuvo 7 puntos, calcula cuántas respuestas correctas tuvo.

Ejercicio 35: Una máquina tiene una pieza rectangular cuya longitud es de 4 *mm* mayor que su ancho. Si el área de dicha pieza es de 96 mm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza?

Ejercicio 36: Considerando la ecuación de segundo grado $3x^2 = 5(6x - 15)$ ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

A) La ecuación no tiene raíces reales.

B) $x = \frac{5}{2}$ *y* $x = 0$ son las raíces.

C) Las raíces son $x = 5 + \sqrt{2}$ *y* $x = 5 - \sqrt{2}$

D) $x = 5$ es raíz doble.

Ejercicio 37: Dado el sistema $\begin{cases} x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$. ¿Cuál de los pares siguientes, es solución del sistema?

A) $(x, y) = (1, 3)$ **B)** $(x, y) = (0, -1)$ **C)** $(x, y) = (3, -1)$ **D)** $(x, y) = (-1, 0)$

Ejercicio 38: La edad de Gabriel es la tercera parte de la edad de Pedro. Dentro de 15 años, la edad de Pedro será el doble de la de Gabriel disminuida en 3 años. De los siguientes sistema de ecuaciones, ¿Cuál utilizarías para calcular las edades de Gabriel y Pedro?

A) $\begin{cases} 3\,G = 3P \\ P = (2G + 15) - 3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} G = \frac{P}{3} \\ P + 15 = 2(G + 15) - 3 \end{cases}$

C) $\begin{cases} G = 3P \\ P + 3 = 2G + 15 \end{cases}$ **D)** $\begin{cases} G = \frac{1}{3}P \\ P - 15 = 2(G - 15) + 3 \end{cases}$

Ejercicio 39: a) La pureza del oro se mide en quilates, el oro puro es de 24 quilates. Otras purezas se expresan como partes proporcionales de oro puro. Así, oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$, o 75% de oro puro; oro de 12 quilates es 50% de oro puro, y así sucesivamente. ¿Cuánto oro de 12 quilates debe ser mezclado, si es posible, con oro puro para obtener 60 gramos de 16 quilates?

Ejercicio 40: Sabiendo hay que un polígono convexo que tiene tantas diagonales como lados, hallar el número de lados del polígono. Hacer un dibujo y verificar lo que obtuvo. (Ayuda: El número de diagonales de un polígono convexo de *n* lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$) .

Ejercicio 41: Sea un triángulo equilátero de lado *x*, y un rectángulo de altura 3*m* cuya base está apoyada sobre uno de los lados del triángulo; además se sabe que tienen igual perímetro. Calcular el área del rectángulo en centímetros.

Ejercicio 42: ¿Qué círculo duplica su área al aumentar su radio en 3 *cm*?

Ejercicio 43: Una vendedora comenta que no importa si vende un par de zapatos a $31 o dos pares a $49, porque la ganancia resulta igual en cada venta. ¿Cuánto le cuesta un par de zapatos a la vendedora y cuál es su ganancia?

Ejercicio 44: En una tribu india utilizan conchas como monedas. Sabemos que tres espejos y dos arcos cuestan 78 conchas y que cuatro espejos y un arco 54 conchas. ¿Cómo averiguar cuántas conchas hay que dar por cada arco.

Ejercicio 45: ¿Quedan determinadas las dimensiones de un terreno rectangular sabiendo que su perímetro es de 300 *m*? ¿Y si además se sabe que el largo excede al ancho en 20 *m*?

Ejercicio 46: La edad de un padre es el doble de la edad de su hijo, pero hace 18 años la quintuplicaba. Hallar las edades actuales del padre e hijo.

Ejercicio 47: Varias personas deben pagar solidariamente en partes iguales la suma de $108000. Dos de ellas resultan insolventes y esto hace que la deuda de cada una de las restantes aumente en $ 9000. Hallar el número de deudores.

Ejercicio 48: Dos grifos tardan en llenar un depósito de agua 3 horas. Sabiendo que el segundo tarda 8 horas más que el primero en llenar solo el depósito, hallar las horas que tarda cada uno de los grifos en llenar el depósito de agua.

Ejercicio 49: Victoria, Graciela e Irma deben repartirse $ 335 ahorrados para el viaje de fin de año, de modo que Victoria recibe $25 más que Graciela, y Graciela $5 más que Irma. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

Ejercicio 50: Un competidor de una maratón el primer día avanza $\frac{1}{3}$ del circuito, el segundo día $\frac{2}{5}$ y el tercer día avanza 16 *Km* para llegar al punto de partida. Hallar el kilometraje del circuito.

Ejercicio 51: Un hombre que va por la calle se encuentra con varios mendigos. Lleva cierta cantidad de monedas y las quiere repartir en partes iguales. Dando a cada mendigo 25 centavos le faltan 10 centavos, y repartiendo a razón de 20 centavos por mendigo le sobran 25 centavos. Encuentra el número de mendigos y la cantidad de dinero que repartió.

Ejercicio 52: La diferencia de dos números menos 1 es igual al menor y la suma más 22 es igual al doble del mayor. Hallar dichos números.

Ejercicio 53: Un avión, para ir de la ciudad de San Luis a la ciudad de Córdoba (la distancia en línea recta es aproximadamente 594*Km*) tarda 54 minutos y para volver tarda 66 minutos. Suponiendo que el viento sopla con velocidad constante en la dirección y sentido de San Luis a Córdoba. Encuentra la velocidad del avión en el supuesto que no sopla viento alguno y la velocidad del viento en los vuelos expuestos.

Ejercicio 54: Un grifo llena un depósito en dos horas. En el momento de llenarse, y sin cerrar el grifo, se abre un desagüe que vacía el depósito en cuatro horas. ¿En cuánto tiempo se vaciaría el depósito si se cerrara la fuente?

Ejercicio 55: Un laboratorio químico tiene dos recipientes con soluciones diferentes. Uno contiene una solución al 10% de ácido nítrico (HNO_3) y el segundo al 30%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 25%?.

CAPÍTULO

3 Expresiones Algebraicas

En España, donde la influencia árabe fue muy importante, surgió el término ***álgebra****, se utilizó para referirse al arte de restituir a su lugar los huesos dislocados y por ello, el término algebrista hacía referencia a la persona que sabía arreglar las dislocaciones (en El Quijote podemos encontrar estos términos en muchos de sus capítulos).*

El libro ***Kitab al-jabr wa al-muqabalah****, fue la obra más importante del matemático árabe* ***Al-Khowarizmi****, parte de su título dio nombre a toda una disciplina matemática:* ***el álgebra****. Al-jabr quiere decir algo así como "restitución", que es lo que se intenta hacer cuando se resuelve una ecuación, restituir el valor de la incógnita.*

Con el álgebra pasamos del número al símbolo, de lo particular a lo general. La gran expresividad del lenguaje algebraico facilita la obtención de relaciones, propiedades y la resolución de problemas.

Para trabajar eficazmente en matemáticas debemos operar convenientemente con expresiones algebraicas, de modo que se transformen las expresiones en otras idénticas, pero más fáciles de manejar.

En este capítulo:

- *Adquiriremos destrezas para conseguir identidades que resulten más convenientes.*
- *Recordaremos las identidades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, diferencia de cuadrados.*
- *Recordaremos las operaciones con polinomios.*
- *Aprenderemos que las regla de Ruffini no sólo sirve para dividir un polinomio por* $x - a$ *, sino que también es útil para evaluar polinomios.*
- *Descompondremos los polinomios en factores cuando sus raíces sean enteras.*
- *Aprenderemos que una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios y que se comportan de forma similar a las fracciones numéricas.*
- *La ejercitación estará destinada a adquirir práctica en el manejo y comprensión de la factorización, de las operaciones con polinomios y de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.*

Repasemos algunos conceptos básicos:

Variables o indeterminadas: se llaman así las letras que se utilizan en los polinomios, usaremos fundamentalmente una x, si necesitamos más usaremos: y, z, t...
Constantes: son números o expresiones que representan números y acompañan a las variables, para ellas se usan las primeras letras del alfabeto: a, b, c...

Monomios son expresiones algebraicas en las que las variables están multiplicadas entre sí y/o por constantes.

Ejemplos: x^2y ; $\frac{1}{3}x^3$; $-\sqrt{5}xyz^2$; $2at^2$; $-5x$

La constante del monomio se llama ***coeficiente***; en los ejemplos anteriores, son coeficientes: 1, 1/3, $-\sqrt{5}$, 2*a*, -5, respectivamente. La, o las variables, de un monomio se la llama ***parte literal*** del monomio. El ***grado*** de un monomio está dado por el número de factores literales y se obtiene sumando los exponentes a los que están elevadas las variables; así:

x^2y	es de grado 3 o tercer grado
$\frac{1}{3}x^3$	es de tercer grado
$-\sqrt{5}xyz^2$	es de cuarto grado
$2at^2$	es de segundo grado
$-5x$	es de primer grado

Las *constantes son monomios de grado cero*, sea *k* cualquier constante, luego: $k = k.1 = kx^0$.

Dos monomios del mismo grado, con las mismas variables elevadas a las mismas potencias, son ***semejantes***

Así, los monomios $3x^2y^3$ y $-\frac{1}{2}x^2y^3$ son semejantes, también lo son $2x^5$ y ax^5 . No son semejantes a estos últimos ninguno de los anteriores, a pesar que todos tienen igual grado.
Es inmediato sumar o restar monomios semejantes:

$$2x^3 + 4x^3 = (2+4)x^3 = 6x^3 \qquad 7x^4 - 3x^4 = (7-3)x^4 = 4x^4$$

*La suma de monomios **no** semejantes*, por ejemplo: $5x + 3x^2$ *nunca* es otro *monomio*, en este caso particular la suma nos da un *binomio*.
Un *binomio* es la suma de dos monomios no semejantes, un *trinomio*, de tres y en general, un *polinomio* es la suma algebraica de cualquier número de monomios no semejantes (en particular, un monomio también es polinomio).

3.1 Polinomios

Ejemplos:

a) $3xy^2 - 2x^2y + y$ **b)** $x^5 + 3x^2 - 3x + 2$

En adelante, trabajaremos solamente con ***polinomios en una sola variable***, como el polinomio del ejemplo b). Este polinomio es suma de cuatro monomios no semejantes: x^5, $3x^2$, $-3x$ y 2. Los coeficientes de estos monomios, llamados también coeficientes del polinomio, son 1, 3, -3 y 2. Los grados de estos monomios son 5, 2, 1 y 0 respectivamente.
El ***grado del polinomio*** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En este caso el polinomio es de quinto grado.

En forma general:

> Un ***polinomio en una variable real*** es una expresión algebraica de la forma:
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$$
> donde $a_0, a_1, ...a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ son constantes, llamadas *coeficientes del polinomio*, $n \geq 0$ es un número entero y x es la variable.

Si $a_n \neq 0$, es éste el ***coeficiente principal*** y n es el ***grado del polinomio***.
A los monomios sumandos de un polinomio se los llama *términos del polinomio.*

Algunos ejemplos:

$A(x) = 3x^2 + x - 1$; $B(x) = x^4 - 7x^3 + \frac{1}{2}x$; $C(x) = \pi x + \sqrt[3]{2}$; $D(x) = -28$;

$E(x) = 0$

A(x), *C(x)*, *D(x)* y *E(x)* son polinomios ***completos*** porque están *todas* las potencias decrecientes de *x. B(x)*, es un polinomio ***incompleto*** porque faltan los términos de segundo y de cero grado, *B(x*) se puede ***completar*** agregando los términos que faltan con coeficientes iguales a cero:

$$B(x) = x^4 - 7x^3 + 0x^2 + \frac{1}{2}x + 0$$

El polinomio *A(x)* es de segundo grado, los coeficientes son: 3, 1 y –1; y el coeficiente principal es 3. En *B(x)*, los coeficientes son 1, -7, 0, $\frac{1}{2}$, 0; el coeficiente principal es 1 y el polinomio es de cuarto grado, *C(x)* es un polinomio de primer grado, con coeficientes π, $\sqrt[3]{2}$ y el coeficiente principal es π, *D(x)* es un polinomio de grado cero, tiene un único coeficiente, que es también coeficiente principal: -28 y por último *E(x)* es el ***polinomio cero***, que es el único polinomio al cual no se le asigna grado, ya que no tiene ningún coeficiente distinto de cero, puesto que cero puede considerarse como:

$$0 = 0x + 0 = 0x^2 + 0x + 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = ...$$

Los ejemplos anteriores nos muestran el siguiente resultado general:

> Todo polinomio de grado n tiene $n + 1$ coeficientes

3.2 Operaciones con polinomios

De aquí en adelante podremos observar la gran similitud que existe entre las operaciones con polinomios y las operaciones con números enteros.

3.2.1 Suma y resta

Para *sumar* dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes. A la *resta* de dos polinomios la transformamos en suma, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo: Sumar y restar los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad Q(x) = x^4 - x^3 + 3x - 5$$

La forma práctica de sumar o restar es ubicando los polinomios uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna:

Suma:

$$P(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$
$$Q(x) = \ x^4 - \ x^3 \qquad + 3x \ - 5$$

$$P(x) + Q(x) = 4x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x - 4$$

Resta:

$$P(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$
$$-Q(x) = -x^4 + x^3 \qquad - 3x \ + 5$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x + 6$$

EJERCICIOS

1.- Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 3$, $Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 11$ y $R(x) = 0$

Determinar: **a)** el grado de cada polinomio y sus respectivos coeficientes.
b) $S(x) = P(x) + Q(x)$
c) $T(x) = P(x) - Q(x)$
d) $U(x) = P(x) + R(x)$
e) el grado de $S(x)$, de $T(x)$ y de $U(x)$

2.- Calcular los valores de *a, b, c* y *d* para que se cumpla:

a) $\left(3x^2 - 4x^3 + 2x - 5\right) + \left(4 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4\right) = 5x^4 - 3x^2 + x - 9$

b) $\left(3x^2 - 6x^5 + 7x^3 - 7x\right) - \left(dx^5 + 7x^3 + cx^2 + bx + a\right) = 2x^2 - x + 3$

3.- Efectuar las operaciones indicadas y reducir la expresión resultante:

a) $3\left(x^3 - 5x + 7\right) - 4\left(x^3 + 5x^2 + 10x - 1\right)$ **b)** $8\left[\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - 1\right]$

3.2.2 Multiplicación

Necesitamos previamente repasar:

> El ***producto de dos monomios*** es otro ***monomio*** con coeficiente igual al producto de los coeficientes de los factores y el grado es suma de los grados de los factores

Ejemplos:

$$5x^3 \cdot \left(-2x^2\right) = -10x^5 \qquad \frac{3}{2}x \cdot 8x = 12x^2$$

En la **multiplicación de un polinomio por un monomio**, aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$\left(3x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5x - 2\right) \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{10}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2$$

Ahora si, estamos en condiciones de **multiplicar polinomios** y lo hacemos aplicando reiteradamente la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de uno por cada término del otro, así por ejemplo:

$$\begin{aligned}&\left(2x^2 - x + 5\right)(x+2) = 2x^2(x+2) - x(x+2) + 5(x+2) = \\ &= 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 5x + 10 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 10\end{aligned}$$

Una manera práctica de realizar la multiplicación de polinomios, efectuando los cálculos de manera ordenada y segura, es la siguiente:

***Recuerda** dejar un espacio cuando falta el monomio de grado intermedio.*

$$\begin{array}{rcl} 2x^4 - 5x^3 & & -2x+3 \\ \times & & x^2 - x + 2 \\ \hline 2x^6 - 5x^5 & & -2x^3 + 3x^2 \\ -2x^5 + 5x^4 & & +2x^2 - 3x \\ 4x^4 - 10x^3 & & -4x + 6 \\ \hline 2x^6 - 7x^5 + 9x^4 - 12x^3 + 5x^2 - 7x + 6 & & \end{array}$$

3.2.3 Identidades Notables

Estas identidades son importantes, las encontramos frecuentemente en los cálculos, por ello, se acostumbra llamarlas notables

- **Cuadrado de un binomio**

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Cubo de un binomio**

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = \left(a^2 + 2ab + b^2\right)(a+b) = a^2(a+b) + 2ab(a+b) + b^2(a+b) = \\ = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

- **Suma por diferencia**

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Para recordar

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Las identidades notables son útiles en la factorización de polinomios, sirven para transformar una expresión algebraica en otra más sencilla, por ejemplo:

$$(x+3)^2-(x-1)^2=\left(x^2+6x+9\right)-\left(x^2-2x+1\right)=6x+9+2x-1=8x-8=8(x+1)$$

la expresión final $8(x+1)$ es mas sencilla que la dada inicialmente y es *idéntica* a ella, luego, podemos sustituir la primera expresión por la última y el cambio es ventajoso.

Más ejemplos:

- $x^2-12x+36=(x-6)^2$
- $\left(2ax^2+5\right)^3=8a^3x^6+60a^2x^4+150ax^2+125$
- $9x^6-\frac{1}{4}=\left(3x^3-\frac{1}{2}\right)\left(3x^3+\frac{1}{2}\right)$

EJERCICIOS

1.- Calcular:

a) $\left(x^2+x+1\right)(x-4)$ **b)** $\left(2x^3-x+1\right)\left(x^2+x-1\right)$ **c)** $\left(2x^3-3x^2+5x-2\right)\left(x^2-x-2\right)$

2.- Si el polinomio $A(x)$ es de tercer grado y $B(x)$ es de segundo grado, ¿cuál es el grado de $A(x)\cdot B(x)$?-

3.- Completar la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \_\_\,x^2+\ \_\_\,x\ +\_\_ \\ x\ -\_\_ \\ \hline \_\_\,x^2\ -\ 14x\ -\ \_\_ \\ \_\_\,x^3\ +\ 7x^2\ +\ \_\_\,x \\ \hline 2x^3\ +\ 3x^2\ -\ 8x\ -\ 12 \end{array}$$

4.- Desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** $(3x-2)(3x+2)$

d) $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ **e)** $\left(x^2+25\right)\left(x^2-25\right)$ **f)** $\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}\right)^2$

5.- Factorear (es decir, expresar como producto):

a) x^2-6x+9 **b)** $16x^2-49$ **c)** x^2-3

d) x^3-3x^2+3x-1 **e)** $\frac{4}{25}-x^2$ **f)** $\frac{1}{4}+x+x^2$

3.2.4 División

Comenzamos dividiendo monomios:

El ***cociente*** de dos ***monomios***, uno de grado *m* y otro de grado *n*, con $m \geq n$, es otro ***monomio***, cuyo grado es la diferencia de los grados y el coeficiente se obtiene dividiendo los coeficientes de los monomios dados, es decir:

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

Ejemplos:

$3x^6 : 2x^2 = \frac{3}{2}x^4$ $\qquad$ $\left(-8x^4\right) : 4x^3 = -2x$ $\qquad$ $\left(-3x^5\right) : \left(-\frac{3}{2}x^5\right) = 2$

Recordemos como se procede en la ***división de dos polinomios*** realizando un ejemplo.

Ejemplo 1 Dividir:

$$P(x) = 2x^3 - x + 5x^4 + 1 \quad \text{por} \quad Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

para ello ubicamos los polinomios como sigue:

$$\begin{array}{l|l} 5x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 - 2x - 3 \\ -5x^4 + 10x^3 + 15x^2 & \\ \hline 12x^3 + 15x^2 - x & 5x^2 + 12x + 39 \\ -12x^3 + 24x^2 + 36x & \text{cociente} \\ \hline 39x^2 + 35x + 1 & \\ -39x^2 + 78x + 117 & \\ \hline 113x + 118 & \\ \text{resto} & \end{array}$$

Pasos realizados

1. Ordenamos según las potencias decrecientes el dividendo y el divisor. Completamos el dividendo.

2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor:

$$5x^4 \div x^2 = 5x^2$$

3. El producto de $5x^2$ por $Q(x)$ (divisor), se coloca bajo el dividendo y se resta.

4. El primer resto parcial es $12x^3 + 15x^2$, bajamos el término: $-x$, a partir de aquí procedemos a repetir lo realizado en 2 y 3.

5. Detenemos el proceso cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor. En nuestro ejemplo tenemos:

$$C(x) = 5x^2 + 12x + 39 \quad y \quad R(x) = 113x + 118$$

En la división anterior, hemos dividido dos polinomios: el dividendo $P(x)$ y el divisor $Q(x)$, obteniendo dos polinomios: el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$. Luego, aplicando la definición de cociente, tenemos:

$P(x)$ | $Q(x)$ de donde $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
$R(x)$ $C(x)$

o bien, dividiendo ambos miembros de la igualdad anterior por $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una cuestión importante para recordar es que el resto $R(x)$, es un polinomio de grado menor que el grado del divisor $Q(x)$, o es cero. Según esto, *el resultado de la división en general* ***no*** *es un polinomio.* Veamos esta afirmación aplicandolá en el Ejemplo 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^4 + 2x^3 - x + 1}{x^2 - 2x - 3} = 5x^2 + 12x + 39 + \frac{113x + 118}{x^2 - 2x - 3} \qquad (1)$$

Observando la expresión (1), vemos que el grado del cociente es la diferencia de los grados del numerador y del denominador, el grado del resto es menor que el del denominador. El último término es una expresión racional que se suma al cociente, luego (1) **no** es un polinomio.
A la división entre polinomios, se le llama ***división entera****,* cuando el resto es distinto de cero.
Cuando el resto es cero, la ***división es exacta****.*

La siguiente es una división exacta

$$\left(6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8\right) : \left(3x^2 + 2\right)$$

el cociente es el polinomio $2x^3 + x - 4$ y es resto es cero, por lo tanto

$$\frac{6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8}{3x^2 + 2} = 2x^3 + x - 4$$

Podemos afirmar que:

Cuando la división es exacta, el cociente ***es un polinomio***

EJERCICIOS

1.- En una división de polinomios, el dividendo es de cuarto grado y el divisor de segundo grado.
a) ¿Cuál es el grado del cociente?. **b)** ¿Qué puede decir del grado del resto?.

2.- Calcular las siguientes divisiones

a) $\frac{5x + 7}{5x}$ **b)** $\frac{x^2 + x + 5}{x^2 + x + 1}$ **c)** $\frac{5x^2 - 4}{x + 1}$

d) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x + 1}$ **e)** $\frac{2x^3 - x + 14}{x + 2}$

3.- ¿Cuánto deben valer m y n para que la siguiente división:

$$\left(x^4 - x^3 + 5x^2 + m\,x + n\right) \div \left(x^2 + 3x - 1\right)$$

a) sea exacta?. **b)** tenga resto $\frac{1}{2}x - 3$?

3.2.4.1 División de un polinomio por $x - a$

Los polinomios, en similitud con los números enteros, se pueden descomponer en producto de factores, luego, cada uno de esos factores divide al polinomio exactamente. El problema que se nos presenta es determinar esos factores, es decir:

Tenemos el polinomio $P(x)$; ¿Existirá algún polinomio distinto de él mismo y de 1 tal que pueda dividirlo de modo que la división sea exacta?

Esta pregunta es difícil de responder en el caso general. Comenzaremos la búsqueda de esos divisores considerando polinomios especialmente simples, como son los de la forma $x - a$. Para efectuar divisiones de este tipo disponemos de un recurso práctico y cómodo conocido como la:

3.2.4.2 Regla de Ruffini

La recordamos aplicándola en una división:

Ejemplo 1: Dividir el polinomio $3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ por $x - 2$ usando la regla de Ruffini.

	3	-2	0	5	-1	
2		6	8	16	42	
	3	4	8	21	41	Resto

Coeficientes del cociente

Los pasos seguidos son los siguientes:

1. En la primera fila del cuadro anterior se colocan los coeficientes del polinomio completo y ordenado según las potencias decrecientes de *x*.

2. En la segunda fila, a la izquierda se escribe *a*, en este caso, 2

3. En la tercer fila, se baja el coeficiente del término de mayor grado: 3 (éste será el coeficiente del 1º término del cociente).

4. Los otros números de la 2º y 3º fila se van obteniendo de la siguiente manera: multiplicamos, $2 \cdot 3 = 6$ que va debajo del coeficiente del 2º término y en la 2º fila y luego se suman, es decir, $(-2) + 2 \cdot 3 = 4$. Así obtenemos el 2º coeficiente del cociente, ubicado en la 3º fila.

5. Reiteramos el proceso: $\begin{cases} 2 \cdot 4 + 0 = 8 \\ 2 \cdot 8 + 5 = 21 \\ 2 \cdot 21 + (-1) = 41 \end{cases}$ hasta terminar.

6. Este último número: 41, es el resto de la división (naturalmente nos tenía que dar un número porque el resto es siempre de menor grado que el divisor, por lo tanto, en nuestro caso el grado del resto debe ser 0.

7. Ahora podemos armar el resultado de la división, el grado de éste es una unidad menor que el grado del dividendo puesto que estamos dividiendo por un polinomio de 1º grado: por lo que el cociente es: $C(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21$ y $r = 41$

Observación: La Regla de Ruffini la podemos aplicar ***sólo*** cuando dividimos un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, el cociente $C(x)$ obtenido, es un polinomio de grado menor en una unidad al de $P(x)$ y el resto ***r*** es una constante.

Al dividendo de la división podemos escribirlo así:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = (x - 2)\left(3x^3 + 4x^2 + 8x + 21\right) + 41$$

dividiendo ambos miembros de la expresión anterior por $(x - 2)$, podemos expresar el cociente:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x - 1}{x - 2} = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21 + \frac{41}{x - 2}$$

observamos que el cociente anterior no es un polinomio

En una división exacta el último término no aparece porque el resto es cero, entonces, en este caso, el cociente nos da un polinomio.

Veamos el caso donde la división es exacta:

Ejemplo 2: $\left(x^3 + 4x^2 + 16x + 39\right) \div (x + 3)$

	1	4	16	39
-3		-3	-3	-39
	1	1	13	0

$C(x) = x^2 + x + 13$ $r = 0$

Analizando los coeficientes obtenidos podemos extraer otras consecuencias importantes:

Observamos que para que la división sea exacta deben ser iguales y de signos opuestos, el término independiente del dividendo, 39 y el producto $(-3) \cdot 13 = -39$.

Esto es: 39 es *múltiplo* de (-3).

Luego, podemos enunciar, algo parecido a un criterio de divisibilidad de polinomios:

> Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por $x - a$ **es necesario** que su término independiente sea ***múltiplo*** de a

Por lo tanto: para determinar expresiones $x-a$ que sean divisores de un polinomio con coeficientes enteros, se deben asignar valores al número a que dividan al término independiente.

Apliquemos este resultado para encontrar los divisores del polinomio x^2+x-2
El término independiente es –2, sus divisores son: 1, -1, 2 y –2.
Probemos, por ejemplo, con $a=1$ y dividamos por $x-1$ usando la regla de Ruffini:

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	0 = r

como el resto es cero, la división es exacta, luego, x^2+x-2 es divisible por $x-1$ y el cociente puede ser expresado como sigue:

$$\frac{x^2+x-2}{x-1}=x+2 \qquad \text{ó} \qquad x^2+x-2=(x-1)\,.\,(x+2)$$

EJERCICIOS

1.- Usar la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(x^3-2x^2+7x-4\right)\div(x-2)$ **b)** $\left(6x^3-x+x^4-10\right)\div(x+3)$

c) $\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\div(x+1)$ **d)** $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x-3\right)\div\left(x+\frac{2}{3}\right)$

2.- ¿Cuánto debe valer m para que al dividir $x^3-2x^2+mx-15$ por $x-3$ la división sea exacta?.

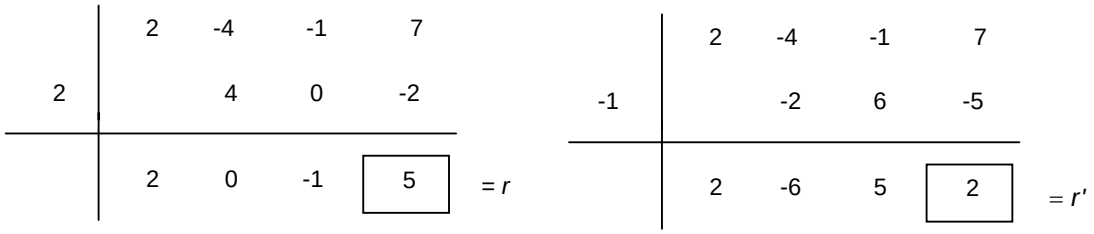
7.3 Valor de un polinomio para $x=a$

El ***valor numérico*** de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es el número que se obtiene al sustituir x por a en $P(x)$ y lo designamos por $P(a)$.

Por ejemplo, si $P(x)=2x^3-4x^2-x+7$

- Para $x=2$ obtenemos $P(2)=2\cdot 2^3-4\cdot 2^2-2+7=5$, es decir, el valor del polinomio $P(x)$ en $x=2$ es 5.
- Para $x=-1$ obtenemos $P(-1)=2\cdot(-1)^3-4\cdot(-1)^2-(-1)+7=2$

Efectuemos ahora las divisiones: $P(x)\div(x-2)$ y $P(x)\div(x+1)$



los restos r y r' coinciden con $P(2)$ y $P(-1)$, respectivamente.
Estos resultados no son casuales, según demostraremos a continuación:

3.4 Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio cuando $x=a$, es decir:

$$r = P(a)$$

Antes de abocarnos a la demostración, es necesario comprender lo que nos dice el teorema:

- Si dividimos el polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ obtenemos, además de un cociente, un resto r.
- Si calculamos el valor numérico del polinomio $P(x)$ cuando $x = a$, obtenemos un número al que llamamos $P(a)$. El teorema nos asegura que r ***es igual a*** $P(a)$**.**

Demostración

Sabemos que: $P(x) = (x-a)\cdot C(x) + r$

en la igualdad anterior sustituimos x por a, obtenemos:

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + r = 0\cdot C(a) + r = r$$

luego $P(a) = r$, que es lo que queríamos probar. ■

Ejemplo 1 ¿Cuál es el resto de la división de $P(x) = 2x^4 - 10x^2 - 7$ por $x+3$?

$$r = P(-3) = 2\cdot(-3)^4 - 10\cdot(-3)^2 - 7 = 2\cdot 81 - 10\cdot 9 - 7 = 162 - 90 - 7 = 65$$

entonces el resto es 65.

Una aplicación inmediata e interesante del teorema del resto es la posibilidad de determinar, con cálculos sencillos, cuando un polinomio es divisible por otro de la forma $x-a$, lo que traducido a lenguaje matemático es:

$P(x)$ es ***divisible*** por $x-a$ si y sólo si $r = 0$

Ejemplo 2 ¿El polinomio $x^2 - 10x^2 + 9$ es divisible por $x+3$?

El resto de la división es:

$$r = P(-3) = (-3)^4 - 10\cdot(-3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$$

por lo tanto la respuesta es afirmativa.

EJERCICIOS

1.- Calcular el valor numérico del polinomio $5x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ para:

a) $x = 1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 2$ **d)** $x = -1$ **e)** $x = \sqrt{2}$

2.- Calcular sin dividir, el resto de las divisiones que siguen:

a) $\left(2x^5 - 3x^2 + 4x - 9\right) \div (x + 2)$
b) $\left(x^3 - 8\right) \div (x - 2)$
c) $\left(x^3 + 8\right) \div (x - 2)$
d) $\left(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1\right) \div (x + 1)$

3.- a) Calcular el cociente y el resto de la división

$$\left(x^5 - 7x^3 - 3x^2 - 8x - 3\right) \div (x - 3)$$

b) Según el resultado encontrado, ¿puedes escribir el polinomio dividendo como producto de dos factores?...si tu respuesta es afirmativa...escríbelo!

3.5 Raíces de un polinomio

Un número real <u>a</u> es ***raíz*** del polinomio $P(x)$ si <u>a</u> es solución de la ecuación:

$$P(x) = 0 \qquad (1)$$

Esta definición nos dice que si reemplazamos en el polinomio a la indeterminada *x* por <u>a,</u> ésta verifica la ecuación (1), es decir: $P(a) = 0$.
Obtenemos así, una consecuencia importante:

Si <u>a</u> es raíz de $P(x)$ entonces el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$, por lo tanto a $P(x)$ podemos expresarlo de la forma:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

donde $C(x)$ es el cociente de dividir a $P(x)$ por $(x - a)$.

Un ejemplo nos dejará mas clara esta conclusión.

Ejemplo ¿Es 2 raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$?
Respondemos a esta pregunta, calculando:

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 + 48 = 16 - 8 - 56 + 48 = 0$$

Como $P(2) = 0$, 2 es raíz de $P(x)$, por lo tanto $P(x)$ es divisible por $x - 2$.
Con la Regla de Ruffini determinamos el polinomio $C(x)$ dividiendo $P(x)$ por $x - 2$:

	2	-2	-28	48
2		4	4	-48
	2	2	-24	0

$$C(x) = 2x^2 + 2x - 24$$

luego $$P(x) = (x-2)\left(2x^2 + 2x - 24\right) \qquad (1)$$

A $P(x)$ lo tenemos expresado como producto de dos polinomios, uno de 1º grado: $(x-2)$ por otro de 2º grado: $2x^2 + 2x - 24$.
De igual manera, podemos analizar si es posible encontrar un factor $(x-a)$ que divida al polinomio $C(x) = 2x^2 + 2x - 24$.
El término independiente, 24, es múltiplo de 3. ¿Será 3 una raíz?.

$$C(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 24 = 18 + 6 - 24 = 0$$

como, efectivamente 3 es raíz, $C(x)$ es divisible por $x-3$ y aplicamos nuevamente la Regla de Ruffini para determinar el polinomio cociente $C_1(x)$

	2	2	-24
3		6	24
	2	8	0

luego $C_1(x) = 2x + 8$ por lo tanto $C(x) = (x-3)(2x+8)$

Reemplazando este último resultado en la expresión (1) de *P(x)*, nos queda

$$P(x) = (x-2)\ (x-3)(2x+8)$$

extrayendo el factor común 2 del último paréntesis resulta:

$$\boxed{P(x) = 2(x-2)\ (x-3)(x+4)}$$

Es decir, hemos logrado una *factorización completa* de $P(x)$.

Observación: El grado de $P(x)$ es 3 y tiene 3 raíces. En general, se cumple:

> Si el polinomio $P(x)$ es de grado *n* entonces tiene como ***máximo*** *n* ***raíces.***

3.5.1 Factor común

En el polinomio $C(x) = 2x + 8$, el número 2 divide a cada término, entonces pudimos extraerlo como factor común, es decir

$$C(x) = 2(x+4)$$

Esta "extracción" que la hicimos casi al finalizar la factorización de $P(x)$, la podríamos haber realizado antes, más aún, en el futuro, cada vez que tengamos que factorear un polinomio, es conveniente primero *extraer todos los factores comunes* y luego continuar con su factorización.

Analicemos nuevamente al polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$$

Observando los coeficientes notamos que son todos múltiplos de 2, así, 2 es factor común:

$$P(x) = 2\left(x^3 - x^2 - 14x + 24\right)$$

Luego continuamos con su factorización y debemos obtener:

$$P(x) = 2(x-2)\ (x-3)\,(x+4)$$

Ejemplos En las siguientes expresiones, extraer todos los factores comunes:

- $6a^3b - 8abc + 4a^2b^3c^2 = 2ab\left(3a^2 - 4c + 2ab^2c^2\right)$
- $2x^6 - \frac{2}{5}x^4 + 2x^3 = 2x^3\left(x^3 - \frac{1}{5}x + 1\right)$
- $4x^5 - 36x^4 = 4x^4(x-9)$

***Recuerda**: aplicando la propiedad distributiva volvemos a la expresión que teníamos al principio.*

3.5.2 Factorización de Polinomios

En este punto, son dos los interrogantes importantes que debemos plantearnos antes de desarrollarlo:

- ¿Qué es factorear un polinomio? y
- ¿Cómo lo hacemos?.

La primera pregunta es probable que la recordemos:

- Factorear o factorizar un polinomio es expresarlo como producto de factores.

Responder la segunda no es tan inmediata. Es natural suponer que los últimos temas desarrollados nos dan las herramientas que necesitamos. Volvamos al ejemplo analizado anteriormente:
Al polinomio $P(x)$ lo factorizamos totalmente y llegamos a lo siguiente:

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48 = 2(x-2)\,(x-3)\,(x+4)$$

Detengámonos un instante a analizar la expresión factorizada del polinomio:

- ✓ El número 2 es igual al coeficiente principal del polinomio o el coeficiente del término de mayor grado.
- ✓ Los términos independientes de cada uno de los factores de primer grado, cambiados de signo, 2, 3 y –4, son justamente las raíces de $P(x)$.

Esta forma de factorear el polinomio $P(x)$ es en realidad un caso particular del siguiente resultado general:

Si r_1, r_2, Λ, r_n son raíces del polinomio $P(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, es decir, si se verifica:

$$P(r_1) = 0\ ;\ P(r_2) = 0\ ;\Lambda\ ;P(r_n) = 0$$

entonces el polinomio se puede escribir de la forma:

$$P(x) = a_n\,(x-r_1)(x-r_2)\Lambda\ (x-r_n)$$

llamada ***descomposición factorial del polinomio***.-

- Ahora, ya estamos en condiciones de contestar el segundo interrogante. Vamos a factorear utilizando todo lo aprendido, los siguientes polinomios:

Ejemplos

$A(x) = x^5 - 9x^3$ $\quad B(x) = x^2 - 8x + 16$ $\quad D(x) = x^4 - 1$

$E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ $\quad F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

El primer paso a seguir (siempre que sea posible) es:

1. *Sacar factor común*

Observamos que, los polinomios $A(x)$ y $F(x)$ tienen factor común, por lo tanto los extraemos:

$$A(x) = x^5 - 9x^3 = x^3\left(x^2 - 9\right)$$

$$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$$

2. *Como no quedan totalmente factorizados los polinomios, utilizamos las igualdades notables y/o el método de las raíces:*

Podemos continuar factorizando al polinomio $A(x)$, utilizando las igualdades notables: $\left(x^2 - 9\right)$ es una diferencia de cuadrados, por lo tanto:

$$A(x) = x^5 - 9x^3 = x^3\left(x^2 - 9\right) = x^3(x-3)(x+3)$$

$A(x)$ queda así totalmente factorizado.

Los polinomios $B(x)$ y $C(x)$ son igualdades notables: cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados, respectivamente. Aplicando estos recursos logramos sus factorizaciones:

$$B(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$

$$C(x) = x^4 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 + 1\right)(x-1)(x+1)$$

En los polinomios $E(x)$ y $F(x) = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$, no es posible usar ninguna igualdad notable. Para lograr su factorización, utilizaremos el *método de las raíces*, procediendo como sigue:

Consideremos primero el polinomio $F(x)$

Antes, sacamos el factor común x (esto significa que 0 es una raíz de $F(x)$), quedando expresado:

$$F(x) = x(\underbrace{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}_{Q_1(x)}) = x \cdot Q_1(x) \qquad (1)$$

Ahora factoreamos a $Q_1(x)$. El término independiente de $Q_1(x)$ es - 6, cuyos divisores son: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y –6. ¿Cuáles de ellos son raíces de $Q_1(x)$?

Probamos: $Q_1(1) = -8 \neq 0$ 1 no es raíz

$Q_1(-1) = -12 \neq 0$ -1 no es raíz

$Q_1(2) = 0$ 2 es raíz

por lo tanto, dividimos a $Q_1(x)$ por $x - 2$

	1	1	-5	1	-6
2		2	6	2	6
	1	3	1	3	0

$$Q_2(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$$

luego, $$Q_1(x) = (x-2)\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right) = (x-2)Q_2(x) \qquad (2)$$

repetimos el proceso con $Q_2(x)$, los divisores de 3 son: 1, -1, 3 y –3, probamos directamente con 3 y –3 (ya sabemos que 1 y –1 no son raíces).

$Q_2(3) = 60 \neq 0$ 3 no es raíz
$Q_2(-3) = 0$ -3 es raíz

dividimos $Q_2(x)$ por $x+3$

	1	3	1	3
-3		-3	0	-3
	1	0	1	0

$$Q_3(x) = x^2 + 1$$

luego:

$$Q_2(x) = (x+3)\,Q_3(x) = (x+3)\left(x^2+1\right)$$

reemplazando en (2) obtenemos:

$$Q_1(x) = (x-2)\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right) = (x-2)Q_2(x) = (x-2)(x+3)Q_3(x) = (x-2)(x+3)\left(x^2+1\right)$$

aquí paramos el proceso, porque $Q_3(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales (notemos que Q_3 es la suma de dos cantidades siempre positivas, luego para todo $x \in R$ nunca es cero), luego reemplazando la última expresión de $Q_1(x)$ en (1) obtenemos:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)\left(x^2+1\right)$$

que es la factorización completa del polinomio $F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

Factorizamos ahora al polinomio: $E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$

El término independiente es 5, sus divisores son: 1, -1, 5 y –5

Calculemos:

$E(1) = -8$ 1 no es raíz
$E(-1) = 0$ -1 es raíz

Dividimos $E(x)$ por $x+1$

	2	-9	-6	5
-1		-2	11	-5
	2	-11	5	0

$$Q(x) = 2x^2 - 11x + 5$$

luego: $$E(x) = (x+1)\left(2x^2 - 11x + 5\right)$$

ahora factorizamos: $2x^2 - 11x + 5$. Tenemos dos opciones: repetimos el procedimiento anterior o, como es un polinomio de 2º grado, podemos usar la fórmula para determinar sus raíces:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

en consecuencia, las raíces son:

$$x_1 = 5 \ , \ x_2 = \frac{1}{2}$$

por lo tanto $Q(x) = 2x^2 - 11x + 5 = 2(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

luego:

$$\boxed{E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = 2(x+1)(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

quedando totalmente factorizado $E(x)$.

Resumiendo

- *Determinamos alguna raíz entera de $P(x)$ probando con los divisores del término independiente, por ejemplo a.*
- *Efectuamos la división de $P(x)$ por $x-a$ determinando otro polinomio $Q(x)$ tal que:*
  $$P(x) = (x-a)Q(x)$$
- *Repetimos el proceso con $Q(x)$ y así seguimos hasta que obtenemos un polinomio que no se pueda descomponer y así tenemos la factorización de $P(x)$*

Nota: si un polinomio de grado n tiene al menos $n-2$ raíces enteras, es fácil factorizarlo, de lo contrario es mucho más complicada su factorización.

Con todo lo que hemos aprendido, además de factorizar, también podemos construir polinomios con características que nos convengan. Por ejemplo:

- Sólo con raíces enteras: $(x+2)(x-3)(x+5) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
- Sólo con raíces fraccionarias: $12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
- Con raíces enteras y fraccionarias: $5(x-1)(x+1)\left(x-\frac{3}{5}\right) = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 3$
- Sin raíces reales:
  $$\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+4\right) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4$$

EJERCICIOS

1.- Sin calcular, razona porqué 2 y 3 no son raíces del polinomio $2x^4 + x^2 - x + 11$

2.- **a)** Razonar porqué $x-1$, $x+1$, $x+2$, $x-2$, $x+4$, $x-4$ son posibles divisores de $x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) ¿Porqué $x+3$ no puede serlo?.

c) Factorear el polinomio dado.

3.- Factorear:

a) $x^3 + 6x^2 - x - 30$ **d)** $x^3 + 8$

b) $4x^5 - 44x^3 + 40x$ **e)** $3x^5 - 3$

c) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$ **f)** $x^4 - 16$

4.- Escribir un polinomio:

a) con raíces -2, 3 y –5 **b)** de cuarto grado con raíces -2, 3 y –5.

3.6 EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Una expresión ***algebraica fraccionaria*** o expresión algebraica racional es el cociente de dos polinomios, es decir: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\forall x \in \mathrm{R}$ tal que $Q(x) \neq 0$

Ejemplo 1

a) $\dfrac{x}{x^2-3}$; b) $\dfrac{1}{x-1}$; c) $\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+5x-10}$; d) $\dfrac{8x-7}{3}$

Las expresiones algebraicas racionales son, en muchos aspectos, muy semejantes, a lo números fraccionarios (números racionales). Así por ejemplo en (a) x es el **numerador** y x^2-3 es el **denominador** de la expresión algebraica.

Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores en común (excepto 1 y –1) decimos que es ***irreducible***.

Las expresiones del ejemplo 1 son todas irreducibles.
Reducimos la expresión racional a su mínima expresión factorizando completamente el numerador y el denominador, simplificando los factores comunes, por ejemplo:

Ejemplo 2

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+5} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} = \dfrac{x+1}{x-5}$

b) $\dfrac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2} = \dfrac{x^2\left(x^3-8\right)}{x^2\left(x^2+x-6\right)} = \dfrac{x^2(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x^2(x-2)(x+3)} = \dfrac{x^2+2x+4}{x+3}$

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes si y sólo si:

$$P(x)\cdot S(x) = R(x)\cdot Q(x)$$

La expresión: $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ es ***equivalente*** a $\frac{x+1}{x-5}$,

también lo es: $\frac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2}$ con $\frac{x^2+2x+4}{x+3}$,

porque estas expresiones son obtenidas de las primeras efectuando simplificaciones.

También son ***equivalentes*** $\frac{x-1}{x^2-x^2+x+1}$ y $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ porque al simplificarse ambas son iguales a $\frac{1}{x^2+1}$

Es claro que al multiplicar el numerador y el denominador de una expresión algebraica por un mismo polinomio, se obtiene una expresión equivalente a la dada, es decir:

$$\frac{x-7}{x+5} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x+5)(x+1)} = \frac{x^2-6x-7}{x^2+6x+5}$$

Usando este último resultado, dadas varias expresiones podemos encontrar otras, equivalentes a ellas, que tengan el mismo denominador, es decir, las reducimos a común denominador.
El ejemplo que sigue nos muestra como hacerlo:

Ejemplos 3 Reduce a común denominador las expresiones**:**

$$\frac{4x+1}{x} \quad ; \quad \frac{x+2}{x+1} \quad ; \quad \frac{x-3}{x(x+1)}$$

Procedemos como cuando trabajamos con las fracciones, es decir, hallamos el *mínimo común múltiplo* de los denominadores factorizados:

$$m.c.m.[x,\ x\ (x+1),\ x+1] = x\ (x+1)$$

> **Recuerda:** *Mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente*

El denominador común de las expresiones es el *m.c.m.* luego, se divide el *m.c.m.* por el denominador de cada expresión, posteriormente se multiplica cada numerador por el resultado de tal división, obteniendo las expresiones algebraicas:

$$\frac{(4x+1)(x+1)}{x\ (x+1)} \quad ; \quad \frac{(x+2)x}{x\ (x+1)} \quad ; \quad \frac{x-3}{x\ (x+1)}$$

esta última no cambió, porque el denominador común es justamente su denominador.

3.6.1 Suma y Resta

Para ***sumar*** expresiones algebraicas racionales, se reducen a común denominador y se suman los numeradores resultantes.-

Ejemplo 1:

$$\frac{x+1}{3x}+\frac{2x-3}{x^2-2x}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x+1)(x-2)}{3x(x-2)}+\frac{3(2x-3)}{3x(x-2)}-\frac{3x(x+2)}{3x(x-2)}=$$

$$=\frac{(x^2-x-2)+(6x-9)+(3x^2+6x)}{3x^2-6x}=\frac{4x^2+11x-11}{3x^2-6x}$$

La ***resta*** es un caso particular de la suma, por ejemplo:

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x+(-1)}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

3.6.2 Producto o multiplicación

El ***producto*** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar los numeradores dividida por la multiplicación de los denominadores.-

Ejemplos:

a) $\frac{5x+2}{x}\cdot\frac{5x-2}{x+1}=\frac{(5x+2)(5x-2)}{x(x+1)}=\frac{25x^2-4}{x^2+x}$

b) $\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)^2}=\frac{1}{x^2-9}$

3.6.3 Cociente o división

El ***cociente*** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.-

Ejemplos:

a) $\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x+1}{x}=\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=x-1$

b) $\frac{x+3}{x-3}\div\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{x+3}{x-3}\cdot(x+3)^2=\frac{(x+3)^3}{x-3}$

c) $\frac{5x+2}{x}\div\frac{5x-2}{x+1}=\frac{5x+2}{x}\cdot\frac{x+1}{5x-2}=\frac{5x^2+7x+2}{5x^2-2x}$

Ejercicios

1.- Simplificar:

a) $\frac{a\,x^2}{a^2\,x^5}$ **b)** $\frac{x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$ **c)** $\frac{x^2+5x}{x(x+5)^2}$

d) $\frac{x+x^2}{x^2+x^3}$ **e)** $\frac{4-x^2}{x-2}$ **f)** $\frac{9x^2-4}{9x^2-12x+4}$

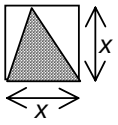
2.- Calcular:

a) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+3}{x+2}$ **b)** $\frac{1}{x^2+10x+25}-\frac{1}{x+5}$

c) $\frac{4-x^2}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}$ **d)** $\frac{x^2(x-1)}{x^2+5x+6}\div\frac{x^2-x}{x^2-9}$

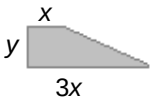
3.7 Práctico: Expresiones Algebraicas

Ejercicio 1: Expresar con un monomio el área de la parte sombreada.



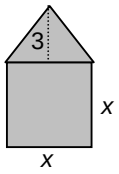
Ejercicio 2: **a)** Verificar que el área del trapecio de la figura es $A = 2xy$.

b) Expresar la diagonal mayor del trapecio utilizando x e y.

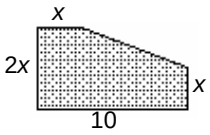


Ejercicio 3: Expresar el área de las figuras siguientes mediante un polinomio.

a)

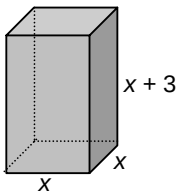


b)

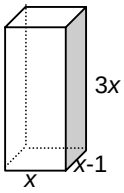


Ejercicio 4: Expresar el *área lateral,* el *área total* y el *volumen* de los siguientes cuerpos geométricos, mediante un polinomio.

a)



b)



Ejercicio 5: Hallar la suma y diferencia de los polinomios: $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 4$

$Q(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 5$

Ejercicio 6: ¿Cuánto debe valer x para que al sustituirla en cada una de las casillas resulte un cuadrado mágico?

x - 1	3x - 2	4 - (1- x)
3x	10 -(x+2)	x - 2
x + 1	2x - 3	3x - 1

La suma de las filas, de las columnas y de las diagonales debe ser la misma.

Ejercicio 7: Efectuar con los siguientes polinomios las operaciones que se indican:

$A(x) = 3x^4 - 8x^2 + 5$; $B(x) = x^2 - x + 1$; $C(x) = 2x^3 + x^2 - 5x - 3$

$D(x) = x^3 - 8$; $E(x) = x - 2$; $F(x) = x + 2$

a) $A + C - B$ **b)** $C - 2D$ **c)** $3C - 4D + \frac{1}{2}B$

d) $A \cdot B$ **e)** $A \cdot B - E \cdot F$ **f)** $E \cdot C + D \cdot F$

g) $A \div C$ **h)** $D \div B$ **i)** $B \div (E \cdot F)$

Ejercicio 8: Determinar los valores de a y b para que el polinomio:

$Q(x) = (3a - b - 5)x^2 + (4a + b - 9)x$ sea idénticamente nulo.

Ejercicio 9: ¿Existe un único polinomio del tipo $P(x) = ax^3 + bx + c$, tal que satisface la condición que $P(1) + P(-1) = 6$?

Ejercicio 10: Calcular:

a) $\left(x^2 + 2x - 1\right)^2$ **b)** $\left(x^3 + x^2 - x + 1\right)^2$

Ejercicio 11: Encuentre, si es posible, los coeficientes *a, b, c* y *d,* de tal manera que los polinomios $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ y $Q(x) = (x^2 + cx + d)^2$ sean iguales.

Ejercicio 12: Calcular las siguientes divisiones y expresarlas en la forma

$$\frac{D}{d} = C + \frac{r}{d}$$

a) $\left(x^6 - 4x^4 + x^2\right) \div \left(x^3 + 2x^2\right)$ **b)** $\left(3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) \div (2x - 4)$

c) $\left(x^3 - x^2 + 2x + 3\right) \div \left(x^2 - 1\right)$ **d)** $\left(-8x^5 - 16x^2 + 8x\right) \div \left(2x^3 - x^2 + 1\right)$

Ejercicio 13: En una división de polinomios el cociente es $C(x) = 4x^2 - x + 5$ y el resto es $R(x) = 3x - 7$. ¿Cuál es el dividendo, si el divisor es $d(x) = x^3 + x - 1$?

Ejercicio14: Encontrar *m* de modo que la siguiente división sea exacta:

$$(6x^2 + mx - 15) \div (2x + 3)$$

Ejercicio 15: Aplicar la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(3x^3 + x^2 - x + 1\right) \div (x + 1)$ **b)** $\left(x^5 - 10x - 7\right) \div (x - 3)$

c) $\left(x^4 + x^2 + 2\right) \div (x + 2)$ **d)** $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) \div (x - 1)$

e) $\left(2x^4 + x^3 - 3x - 5\right) \div (x - 2)$ **f)** $\left(x^5 - 243\right) \div (x - 3)$

Ejercicio 16: En el polinomio $A(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + kx + 3$ ¿cuánto vale *k*, si $A(-1) = -2$?

Ejercicio 17: Dado el polinomio $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 5$, calcular $Q(1)$. ¿Cuál es el resto de dividir $Q(x)$ por $(x - 1)$?

Ejercicio 18: Determinar, sin efectuar la división, en que casos el dividendo es múltiplo del divisor:

a) $\left(x^5 + a^5\right) \div (x + a)$ **b)** $\left(x^5 - a^5\right) \div (x - a)$

c) $\left(x^5 - a^5\right) \div (x + a)$ **d)** $\left(x^5 + a^5\right) \div (x - a)$

e) $\left(x^4 + a^4\right) \div (x - a)$ **f)** $\left(x^4 + a^4\right) \div (x + a)$

g) $\left(x^4 - a^4\right) \div (x - a)$ **h)** $\left(x^4 - a^4\right) \div (x + a)$

Observa los resultados obtenidos, ¿puedes generalizarlos?

Ejercicio 19: Calcular los valores de *m* y *n* para que el polinomio $x^3 + 6x^2 + mx + n$ sea divisible por: $x^2 + x - 12$

Ejercicio 20: Hallar *a* y *b* en el polinomio $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ para que sea divisible por: $x - 2$ y el polinomio cociente tenga por término independiente 4.

Ejercicio 21: Al dividir un polinomio por $(x+1)$ se obtiene resto 5, y al dividirlo por $(x-2)$ el resto que se obtiene es –1. ¿Qué resto se obtendrá al dividir el mismo polinomio por $(x+1)(x-2)$?

Ejercicio 22: Comprobar que 3, -3, -5 y $\frac{2}{3}$ son raíces del polinomio

$$P(x) = 3x^4 + 13x^3 - 37x^2 - 117x + 90$$

y escribir su descomposición factorial.

(***Ayuda**: Es muy laborioso determinar el valor numérico de P(x) para las raíces dadas, una manera menos complicada es aplicar la regla de Ruffini sucesivamente. Es decir, por ejemplo, para x = 3, si P(3) = 0, en el cociente de P(x) por (x – 3) se vuelve a aplicar Ruffini para x = -3 y así se continúa hasta terminar con todas las raíces)*

Ejercicio 23: Escribir un polinomio cuyas raíces son: -3, 5 y –7.

Ejercicio 24: Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 10x + 25$ **b)** $x^2 - 5x + 4$ **c)** $x^2 - 3$

d) $x - x^3$ **e)** $x^3 - 1$ **f)** $3x^2 - 2x$

Ejercicio 25: Encontrar un polinomio *P*(*x*):

a) de grado 3 tal que *P*(0) = 10 y cuyas raíces sean $-\frac{2}{3}$, 1 y 5 ;

b) de grado 2 tal que *P*(2) = - 6 y cuyas raíces sean $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$

Ejercicio 26: Factorear:

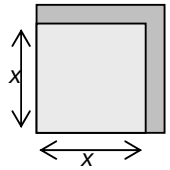
a) $x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ **b)** $5x^3 - x^5$ **c)** $4x^4 - 13x^2 + 9$

d) $2x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 10x$ **e)** $6x^2 + 18x + 12$ **f)** $2x^3 + 5x^2 + x - 2$

g) $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$ **h)** $x^3 - 2x^2 + x$ **i)** $4x^3 - 4x^2 - 25x + 25$

Ejercicio 27: Buscar dos polinomios divisibles por $x-3$, $x-5$ y $x+2$.

Ejercicio 28: Si el lado *x*, de un cuadrado, aumenta en un 10 %, ¿en qué porcentaje aumenta la superficie?



Ejercicio 29: ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas racionales son irreducibles?

a) $\frac{2x-3}{x+4}$ **b)** $\frac{x^2-16}{x-4}$ **c)** $\frac{x-3}{x^2+6x+9}$ **d)** $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

Ejercicio 30: Simplificar:

a) $\frac{ax^3}{a^2x^2}$ **b)** $\frac{15x^3y^4}{10y^5x^2}$ **c)** $\frac{8x^3}{2^2x^2}$

d) $\frac{x-1}{x^2-1}$ **e)** $\frac{x^3(x+2)^2}{x^2+2x}$ **f)** $\frac{x^3-x^2}{x-x^2}$

g) $\frac{x^3+x^2+x}{5x^2+5x+5}$ **h)** $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ **i)** $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

j) $\frac{4x^2+12x+9}{x^2-\frac{9}{4}}$ **k)** $\frac{x^4-1}{1-x^2}$ **l)** $\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3-2x^2-9x+18}$

Ejercicio 31: Determinar, entre las siguientes expresiones, las que son equivalentes:

a) $\frac{x^4y}{x^5y^2}$ **b)** $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ **d)** $\frac{xy(x+1)}{x^3y^2+x^2y^2}$

Ejercicio 32: Reducir a común denominador:

a) $\frac{xy}{x^2-y^2}$; $\frac{y}{x^3y+x^2y^2}$; $\frac{x}{y(x+y)^3}$

b) $\frac{1}{x^2+2x-3}$; $\frac{x-2}{x^2+4x+3}$; $\frac{x-3}{x^2-9}$

Ejercicio 33: Calcular y simplificar:

a) $\frac{2(x+3)}{x^2+2x-3}+\frac{x+3}{x^2+4x+3}$ **b)** $\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}$

c) $\frac{x+5}{x^2-4x+3}-\frac{2x+6}{x^2-3x}$ **d)** $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+2x+1}+1$

Ejercicio 34: Al simplificar la expresión $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$, es resultado que se obtiene es:

a) $x+y$ **b)** $\frac{xy}{x+y}$ **c)** xy **d)** $\frac{1}{xy}$ **e)** $\frac{x+y}{xy}$

Ejercicio 35: Operar y simplificar:

a) $\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{x^3-1}{2x^2}$ **b)** $\frac{3x-1}{x^5}\cdot\frac{x^3}{9x^2-6x+1}$ **c)** $\frac{x^3-x}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-x}$

Ejercicio 36: Operar y simplificar:

a) $\frac{1}{x+2}\div\frac{1}{3x^2-12}$ **b)** $\frac{x+3}{x^2-4}\div\frac{x^2-x-12}{x^3-8}$ **c)** $\frac{x^3+x}{x^2-x+1}\div\frac{4x^2+4}{x^2+x-2}$

Ejercicio 37: Resolver:

a) $3-x+\frac{x^2}{x+3}$

b) $\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1+x}$

c) $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$

d) $\left(\frac{x^2}{y}-y\right)\div\left(1+\frac{x}{y}\right)$

e) $\frac{x}{x+5}-\frac{1}{\frac{x^2}{25}+\frac{x}{5}}$

f) $\left(\frac{1}{x-1}+1\right)\cdot\left(3x-\frac{3}{x}\right)$

g) $\frac{1}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}$

h) $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$

i) $\frac{a+\frac{ab}{c}}{a(b+c)}$

j) $\frac{a(b+5)}{a+\frac{ab}{5}}$

k) $\left(x+y+\frac{y^2}{x-y}\right)\frac{x^3-y^3}{x^2}$

l) $(26x+6)\left(3x-\frac{2x+3}{5}\right)\frac{25}{169x^2-9}$

m) $\frac{y^2+6y+9}{4y^2-4}\div\frac{y^2-9}{2y-1-y^2}$

n) $\frac{x^4-1}{2x}\cdot\frac{2ax^2}{x^6+1}\cdot\frac{x^4+x^2+1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{1}{ax}$

o) $\frac{1}{a+1}+\frac{a-2}{a^3+1}-\frac{a-1}{a^2-a+1}$

p) $\frac{5m}{\frac{m^2}{4}-1}+\frac{4}{\frac{1}{2}m-1}-\frac{5}{\frac{1}{2}m+1}$

CAPÍTULO

4

Tópicos de Geometría

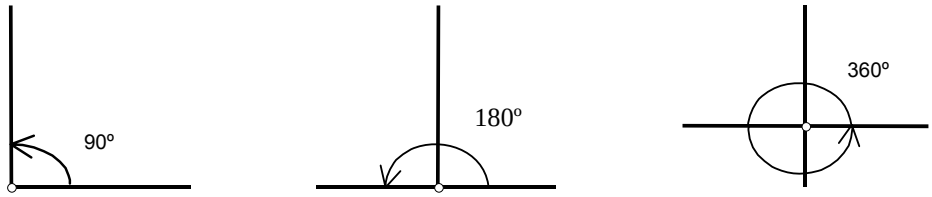
Geometría, palabra que proviene del griego, geo: tierra; metrein: medir, es una de las ramas mas antiguas de las ciencias, que tal vez ha tenido y tenga mayor incidencia en la vida cotidiana. Su origen estuvo ligada a la resolución de problemas concretos, tales como la medida de extensiones de terrenos, la construcción de viviendas, puentes , monumentos, etc..

Para comenzar, vamos a recordar, en este capítulo, algunos conceptos básicos. Entre ellos los referentes al triángulo, el polígono más simple, con muchas propiedades sorprendentes, también semejanza y sus múltiples aplicaciones a la resolución de problemas.

4 Ángulos

4.1 Medida de ángulo: sistema sexagesimal

Para medir la amplitud de un ángulo podemos utilizar el sistema sexagesimal.



Ángulo recto Ángulo llano Ángulo completo

Recordemos que un ángulo recto mide 90^0, un ángulo llano 180^0 y un ángulo completo 360°. El grado es la unidad de medida, a esta unidad se la llama grado sexagesimal porque se divide en 60 unidades de orden inferior. Los submúltiplos son:

- minuto → $1' = \frac{1}{60}$ de grado, es decir, $1^{\circ} = 60'$
- segundo → $1'' = \frac{1}{60}$ de minuto, es decir, $1' = 60''$

Ejemplo 1: Expresar en segundos $35º54'18''$

Solución:

$1º = 60' = 3600''$ Sabemos que:

$1º$ _____ $3600''$

$35º$ _____ $x = 35 \ x \ 3600 = 126000''$

$1'$ _____ $60''$

$54'$ _____ $x = 54 \ x \ 60 = 3240''$

En consecuencia $35º54'18'' = 126000'' + 3240'' + 18'' = 129258''$

Ejemplo 2: Expresar a grados, minutos y segundos: $36420''$

Solución

Sabemos que: $60'' = 1'$, luego primero debemos devidir por 60 y obtenemos $607'$ y sobran $8''$

$$\begin{array}{r|l} 36428'' & 60 \\ 0428 & 607' \\ 8'' & \end{array}$$

Al dividir nuevamente por 60 , ya que $60' = 1^o$ obtenemos 10^o y sobran $7'$

$$\begin{array}{r|l} 607' & 60 \\ 007 & 10^o \\ 7' & \end{array}$$

Por lo tanto $36428'' = 10^o 7' 8''$

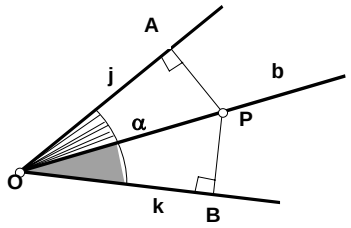
EJERCICIOS

1.- Expresar en minutos los ángulos: a) $71^o 47'$, b) $26^o 15''$

2.- Expresar a grados, minutos y segundos los ángulos: a) 9123" b) 200.35'

4.2 BISECTRIZ

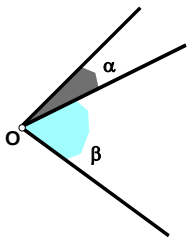
La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide a éste en dos partes iguales, es decir, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.
En la figura, la semirrecta **b** es la bisectriz , sus puntos equidistan de las semirrectas **j** y **k.**
Por ejemplo: El punto *P* pertenece a la bisectriz ya que, $\overline{PA} = \overline{PB}$



4.3 PARES DE ÁNGULOS

- **Ángulos consecutivos:**

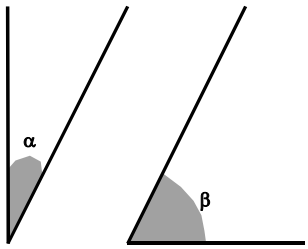
  Son aquellos que sólo tienen en común el vértice y un lado.



- **Ángulos complementarios**

Dos ángulos α y β son complementarios si suman 90^o y se dice que uno es complemento del otro.

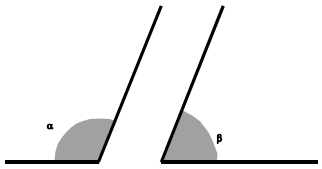
$\alpha + \beta = 90^o$



- **Ángulos suplementarios**

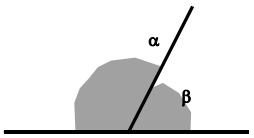
Dos ángulos α y β son suplementarios si suman 180^{o} y se dice que uno es el suplemento del otro.

$\alpha + \beta = 180^{o}$



- **Ángulos adyacentes**

Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y suplementarios.



Ejemplo 1:

a) Sea $\alpha = 35^{o}\,20'\,5''$, encontrar el ángulo β el suplementario de α.

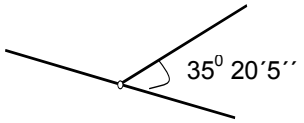
Recordemos que la suma da 180º

$$\alpha + \beta = 180^{o} \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^{o} - \alpha$$

Además $180^{O} = 179^{O}59'\,60''$, entonces

$$\begin{array}{r} 179^{o}\ 59'\ 60'' \\ -\quad 35^{o}\ 20'\ 5'' \\ \hline \beta = 144^{o}\ 39'\ 55'' \end{array}$$

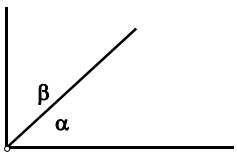
β = el suplemento



Ejemplo 2: Sea $\alpha = 43^{o}15'27''$ encontrar el ángulo β el complemento de α.

Recordemos que: $\alpha + \beta = 90^{O} \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^{o} - \alpha$

$$\begin{array}{r} 89^{o}\ 59'\ 60'' \\ -\quad 43^{o}\ 15'\ 27'' \\ \hline \beta = 46^{o}\ 44'\ 33'' \end{array}$$



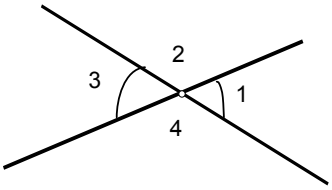
- **Opuestos por el vértice**

Son los ángulos que tienen el vértice en común y los lados son semirrectas opuestas.

$\hat{1}$ y $\hat{3}$, $\hat{2}$ y $\hat{4}$ opuestos por el vértice

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

$\hat{1} = \hat{3}$ $\hat{2} = \hat{4}$



4.4 RECTAS

Como sabemos:
- Una recta divide al plano en dos semiplanos.
- Dos rectas de un plano se cortan en un punto, o son paralelas o coincidentes.

4.4.1 Ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas por una secante

En la figura 1a se tienen las rectas *a* y *b* paralelas y la recta *n* secante, también llamada transversal, que las corta en los puntos *M* y *N*. Quedan determinados ocho ángulos (ver figura 1b) que reciben nombres de acuerdo a su posición.

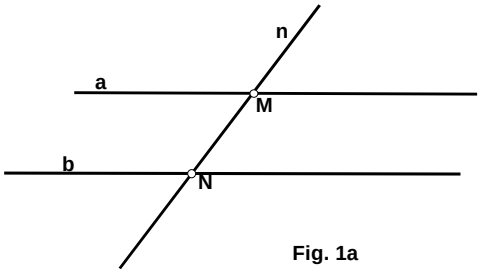


Fig. 1a

- Se llaman ángulos interiores a los que pertenecen al semiplano respecto de la recta *a* que contiene al punto *N* y al semiplano respecto de *b* que contiene al punto *M*.

Ejemplo: Los ángulos 3,4, 5 y 6 son ángulos internos.

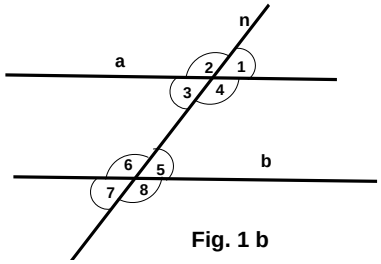


Fig. 1 b

- Se llaman ángulos exteriores o externos a los ángulos que no son interiores.

Ejemplo : Los ángulos 1, 2, 7 y 8 son externos.

- **Ángulos correspondientes**

Se llaman ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una secante, a los pares de ángulos no adyacentes ubicados en un mismo semiplano respecto de la secante y de los cuales uno es interno y otro externo.
Ejemplo : En la figura 1b los ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una secante son:

$\hat{1}$ y $\hat{5}$, $\hat{2}$ y $\hat{6}$; $\hat{4}$ y $\hat{8}$; $\hat{3}$ y $\hat{7}$.

- **Ángulos alternos externos**

Se llaman ángulos alternos externos a los pares de ángulos externos no adyacentes que pertenecen a distintos semiplanos respecto de la recta secante.

Ejemplo : En la figura 1b, son: $\hat{1}$ y $\hat{7}$, $\hat{2}$ y $\hat{8}$

- **Ángulos alternos internos**

Se llaman ángulos alternos internos a los pares de ángulos internos no adyacentes que pertenecen a distintos semiplanos respecto de la recta secante.

Ejemplo : En la figura 1b, son: $\hat{3}$ y $\hat{5}$, $\hat{4}$ y $\hat{6}$

> ➢ Si dos rectas paralelas ***a*** y ***b***, son cortadas por una secante ***n***, entonces,
> - Los ángulos correspondientes son iguales.
> - Los ángulos alternos externos son iguales.
> - Los ángulos alternos internos son iguales.

Queda para el lector analizar en la figura 1b los pares de ángulos iguales y justificar su respuesta.

Ejemplo 1:

Dada la figura 2, y sabiendo que el ángulo $\hat{1} = 35^{o}$, encontrar los otros siete ángulos

Solución

Los ángulos alternos internos y los opuestos por el vértice son iguales, por lo tanto, los ángulos $\hat{3}$, $\hat{5}$ y $\hat{7}$, miden 35^{o} ya que:

$\hat{1} = \hat{3}$ por ser opuestos por el vértice

$\hat{3} = \hat{5}$ por ser alternos internos

$\hat{5} = \hat{7}$ por ser opuestos por el vértice

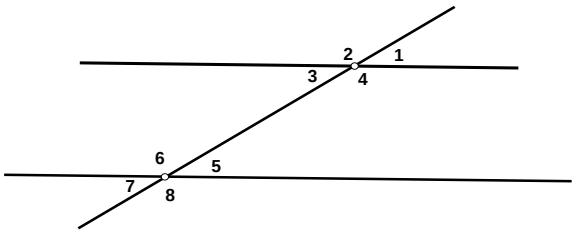


Figura 2

¿Cómo encontrar la medida del ángulo $\hat{4}$?

$\hat{1}$ y $\hat{4}$ son suplementarios por lo tanto $\hat{1} + \hat{4} = 180^{o}$, en consecuencia

$\hat{4} = 180^{o} - 35^{o} = 145^{o}$

Como: $\hat{4} = \hat{2}$ opuestos por el vértice, $\hat{2} = \hat{6}$ correspondientes entre paralelas, $\hat{6} = \hat{8}$ opuestos por el vértice, entonces los ángulos $\hat{2}, \hat{6}$ y $\hat{8}$ miden también 145^{o}.Por lo cual hemos obtenido las medidas de los siete ángulos.

4.5 TRIÁNGULOS

4.5.1 Clasificación de los triángulos

a) Los triángulos se clasifican según los lados en:

- **Equiláteros**: tienen los tres lados iguales
- **Isósceles**: tienen dos lados iguales
- **Escalenos**: tienen sus tres lados desiguales

b) Los triángulos se clasifican según sus ángulos en:

- **Rectángulos**: tienen un ángulo recto; es decir, 90^{O}.
- **Acutángulos**: tienen sus tres ángulos agudos (menores de 90^{O}).
- **Obtusángulos**: tienen un ángulo obtuso (mayor de 90^{O}).

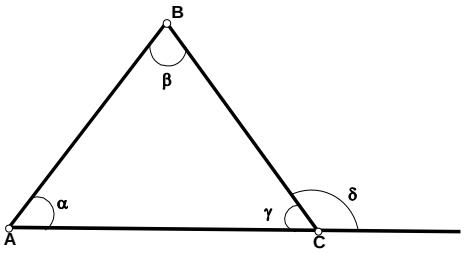
4.5.2 Propiedades del triángulo

- **Propiedad fundamental**:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º

- **Propiedad del ángulo exterior de un triángulo**

El ángulo exterior de un triángulo (el adyacente a uno de los ángulos interiores del triángulo) es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes.



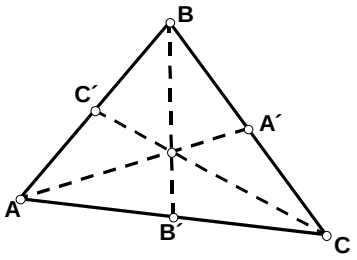
Es decir, observando la figura, sacamos como conclusión:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$$
$$\delta = \alpha + \beta$$

4.5.3 Medianas, mediatrices, bisectrices y alturas de un triángulo

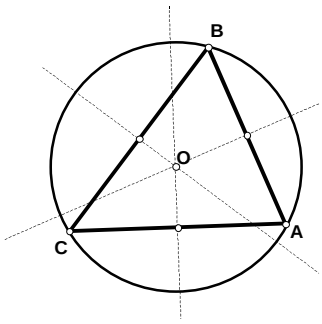
- **Mediana** es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Un triángulo tiene tres medianas, que se cortan en un punto llamado **baricentro o centroide.**



- **Mediatriz** es la recta perpendicular a un lado en su punto medio.

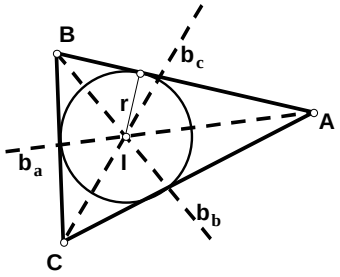
El punto intersección de las tres mediatrices se llama **circuncentro.**



En la figura, ***O*** es el circuncentro y la distancia de este punto a los vértices son iguales, es decir, equidista de los vértices del triángulo. A la circunferencia con centro *O* y que pasa por los vértices del triángulo se le llama circunferencia circunscrita del triángulo.

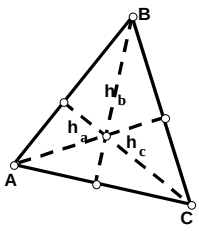
- **Bisectriz** de un triángulo es la bisectriz de un ángulo interior.

Las bisectrices de un triángulo son tres y se intersecan en un punto llamado **incentro.**



El incentro ***I*** equidista de los lados del triángulo. Sea ***r*** el segmento perpendicular desde ***I*** a uno de los lados del triángulo, la circunferencia con centro ***I*** y radio ***r*** es la circunferencia inscrita al triángulo.

- **Altura** de un triángulo es el segmento perpendicular que va, desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



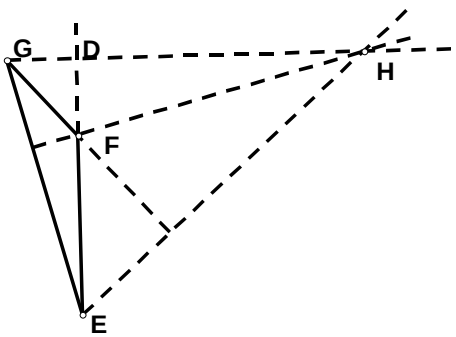


Fig. 3

Las alturas de un triángulo son tres y se intersecan en un punto llamado **ortocentro.**

4.5.4 Perímetro y área de un triángulo

- El **perímetro** de un triángulo es la suma de los lados.
- El **área** de un triángulo está dada por: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

donde b indica la medida de la base y h designa la distancia o altura del vértice al lado opuesto que se toma como base.

En la figura 3 tenemos, por ejemplo:

El área del triángulo ABC: $A = \dfrac{\overline{AB} \cdot h_c}{2} = \dfrac{\overline{BC} \cdot h_a}{2} = \dfrac{\overline{AC} \cdot h_b}{2}$

y el área del $\overset{\Delta}{EFG}$**:** $A = \dfrac{\overline{EF}.\overline{GD}}{2}$

Queda para el lector escribir otra forma de calcular el área para el $\overset{\Delta}{EFG}$.

Ejemplo. Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo. Siendo $\overline{AB} = 6\ m$, $\overline{BC} = 8\,m$, $\overline{AC} = 7\,m$. Su perímetro es 21 *m.*

4.5.5 Igualdad o congruencia de triángulos

Dos triángulos son iguales (congruentes) cuando tienen todos sus lados y sus ángulos respectivamente iguales.

- **Criterios de igualdad de triángulos**

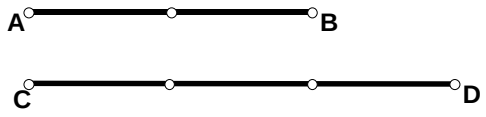
A continuación daremos las condiciones necesarias y suficientes para saber si dos triángulos son iguales.
Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

1) dos lados y el ángulo comprendido;
2) los tres lados;
3) un lado y los ángulos adyacentes a él;
4) dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

4.6 SEGMENTOS PROPORCIONALES

Llamamos **razón** r entre el segmento $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{CD}$, al cociente entre sus medidas dadas en la misma unidad.

$r = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{2}{3}$

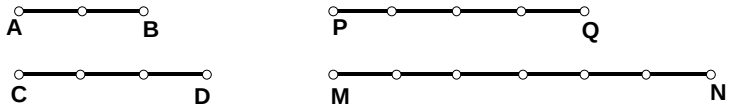


Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **proporcionales** a otros dos $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$, si la razón de las medidas de los dos primeros segmentos es igual a la de los segundos .

Es decir;

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}}$$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3}$



$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Nota: Como puede observarse los segmentos **no** son iguales pero los cocientes son iguales, en consecuencia son proporcionales.

Ejemplo 1: Sean $\overline{AB} = 30$ cm , $\overline{CD} = 150$ cm , $\overline{PQ} = 1$m y $\overline{MN} = 500$ cm . ¿Son proporcionales los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con respecto a los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$?.

Solución

Al analizar los cocientes $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{30}{150} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ y $\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

obtenemos que los segmentos son proporcionales.
Queda para el lector hacer una figura que represente al ejemplo anterior.

4.6.1 Teorema de Thales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas en un plano, los segmentos determinados en una de éstas son proporcionales a los correspondientes de la otra, es decir, (ver figura 4)

m // p // q , entonces

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$; $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$

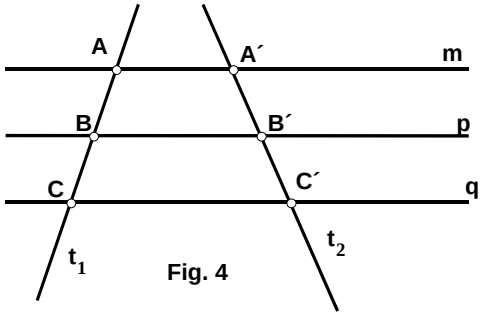


Fig. 4

Recíprocamente:

Si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, por ejemplo, son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$, entonces las rectas *m, p, q* son paralelas.

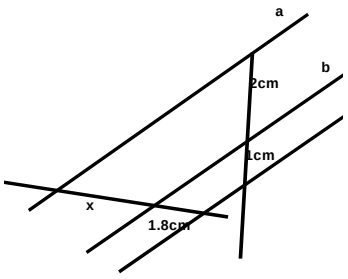
Ejemplo 1: Sabiendo que las rectas *a, b y c* son paralelas. Calcular el segmento *x*, usando los valores de los otros tres segmentos que se dan en la figura.

Solución

Por la proporcionalidad tenemos

$\frac{2}{1} = \frac{x}{1{,}8}$, luego $x = \frac{2 \times 1{,}8}{1} = 3{,}6$

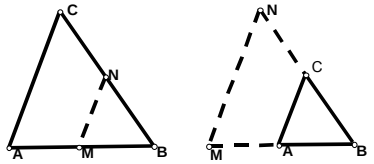
En consecuencia: $x = 3{,}6\,cm$



Corolario 1 del teorema de Thales

Toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos lados (o su prolongación) segmentos proporcionales.

En las figuras tenemos que $\overline{AC} \,//\, \overline{MN}$, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BN}}$ ó $\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}}$ y otras ...



Ejemplo 2: Sean *m, p, q* rectas paralelas, como en la figura 4. Al medir, se ha comprobado que $\overline{AB} = 2\,cm$, $\overline{BC} = 1.5\,cm$ y $\overline{B'C'} = 1.8\,cm$. Calcular $\overline{A'B'}$.

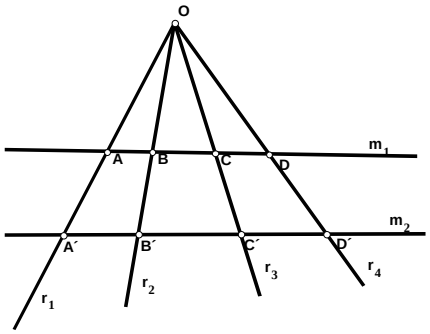
Solución
Como las rectas son paralelas, los segmentos son proporcionales.

Por lo tanto $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ y en consecuencia $\frac{2}{1.5} = \frac{\overline{A'B'}}{1.8} \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{2 \times 1.8}{1.5} = 2.4\,cm$

Corolario 2 del teorema de Thales

Varias rectas concurrentes en un punto, determinan sobre dos rectas paralelas cualesquiera, segmentos homólogos proporcionales, es decir:

$r_1,\ r_2,\ r_3$ y r_4 concurrentes en 0 y $m_1 \,//\, m_2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$



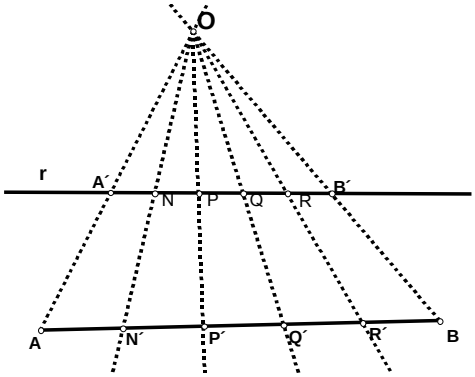
Recíprocamente. Cuando varias rectas determinan sobre dos rectas paralelas segmentos homólogos proporcionales estas rectas se cortan en un mismo punto.

$m_1 // m_2$ y $\left.\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}\right\} \Rightarrow r_1,\ r_2,\ r_3$ y r_4 se cortan en el mismo punto.

Ejemplo 3: Dividir en cinco partes iguales a un segmento de *9 cm.*

Solución
Sea $\overline{AB} = 9\ cm$ y se lo quiere dividir en 5 partes Iguales.

Para realizarlo se marca una recta *r* paralela al segmento $\overline{AB}$, en la cual con una medida arbitraria pero fija se determinan los puntos *A*', *N*, *P*, *Q*, *R* y *B*', tal que,
$\overline{A'N} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RB'}$

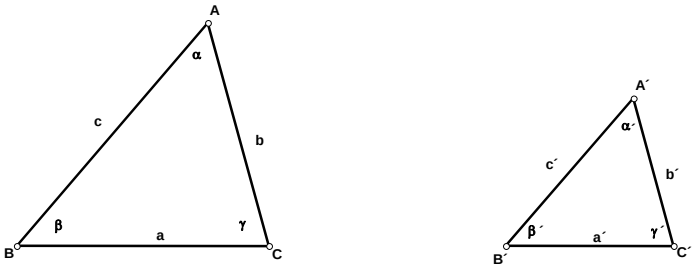


Se trazan las rectas que unen *A* con *A'* y *B* con *B*' y se cortan en el punto *O.* Desde el punto O se trazan las rectas que pasan por *N, P, Q, R,* éstas cortan al segmento $\overline{AB}$ en cuatro puntos que los designamos como *N', P', Q',* y *R'*, respectivamente. Por el corolario 2 del teorema de Thales tenemos que: $\overline{AN'} = \overline{N'P'} = \overline{P'Q'} = \overline{Q'R'} = \overline{R'B}$, y queda el segmento dividido en cinco partes iguales.

4.7 TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos (aquellos que se oponen a ángulos iguales) proporcionales, es decir, (ver figura):

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' , \beta = \beta' , \gamma = \gamma' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$



Nota: Designaremos, por comodidad, a los lados de un triángulo con la misma letra que le asignamos al vértice opuesto pero con letra minúscula.

De acuerdo a la definición de igualdad de triángulos, tenemos:

Dos triángulos iguales son semejantes y la razón de proporcionalidad es 1.

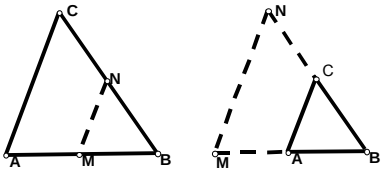
Ejemplo 1:
Los lados de dos triángulos *ABC* y *A´B´C´* miden: $a = 4$, $b = 3$, $c = 4.5$ y $a' = 6$, $b' = 4.5$, $c' = 6.75$, respectivamente.

Estos triángulos resultan semejantes puesto que: $\frac{4}{6} = \frac{3}{4.5} = \frac{4.5}{6.75}$

y la razón de proporcionalidad es: $r = \frac{2}{3}$

El Corolario 1 del Teorema de Thales, puede reformularse diciendo:

> "Toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos lados o sus prolongaciones, un triángulo semejante al primero".

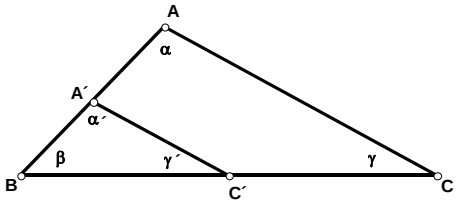


En la figura tenemos: $\overset{\Delta}{ABC}$ semejante a $\overset{\Delta}{MBN}$

Ejemplo 2:

Sean $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{A'BC'}$ dos triángulos construidos de forma que $\overline{A'B} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\overline{BC'} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, como los lados $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son paralelos, resultan los ángulos iguales, o sea $\alpha = \alpha' \;\; ; \; \beta = \beta' ; \;\; \gamma = \gamma'$



Supongamos que $\overline{AB} = 4\ cm$ y $\overline{AC} = 6\ cm$. ¿Cuánto mide $\overline{A'C'}$?.

Por los datos, $\overline{A'B} = 2\ cm$, por lo tanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} = \frac{4}{2} = 2$, por semejanza de los triángulos

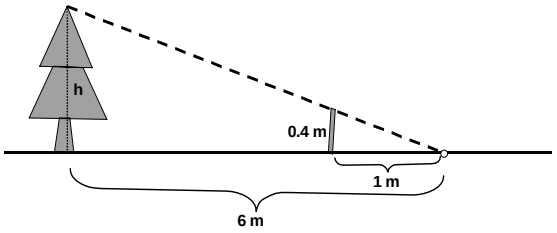
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{6}{\overline{A'C'}} = 2$, en consecuencia: $\overline{A'C'} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}6 = 3$.

Respuesta: $\overline{A'C'} = 3cm$

El teorema de Thales y la semejanza de triángulos nos permiten resolver de manera sencilla algunas situaciones problemáticas:

Ejemplo 3:

Dada la siguiente figura, calcular la altura del árbol utilizando una varilla de 40 *cm* de longitud. Se conoce que la sombra de la varilla es de 1*m* y la sombra del árbol es de 6 *m*.



Solución

Como muestra la figura, nos queda determinado dos triángulos semejantes, por lo tanto:

$$\frac{h}{0.4} = \frac{6}{1} \quad \Rightarrow \quad h = 2.4\,m$$

4.7.1 Criterios de semejanza de triángulos

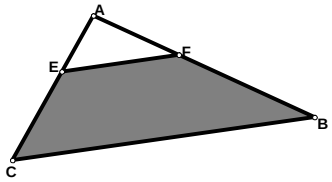
A continuación daremos las condiciones necesarias y suficientes para saber si dos triángulos son semejantes.
Dos triángulos son semejantes cuando:

1) tienen respectivamente proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido;
2) tienen respectivamente proporcionales los tres lados;
3) tienen respectivamente iguales dos ángulos;
4) tienen respectivamente proporcionales dos lados e igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Nota: a) Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes.
b) Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.
c) Dos triángulos isósceles que tienen un ángulo igual son semejantes.

Ejemplo 1:

Dada la siguiente figura, calcular el perímetro del trapecio *BCEF*, conociendo los lados del triángulo *ABC* y el segmento *AF*.
$a = 8\,cm,\quad b = 5\,cm,\quad c = 6\,cm,\quad \overline{AF} = 2\,cm$



Solución

Recordando que el perímetro de un cuadrilátero es la suma de los lados, se deben calcular los lados $\overline{FB}, \overline{CE}\ y\ \overline{EF}$.

$\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = 6 - 2 = 4 \ \Rightarrow\ \ \overline{FB} = 4\,cm \qquad (1)$

Los triángulos *ABC* y *AEF* son semejantes, ya que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son paralelos, por lo tanto los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{8} = \frac{2}{6} \Rightarrow \overline{EF} = 8.\frac{2}{6} \ \Rightarrow\ \overline{EF} = \frac{8}{3}cm \ (2)$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{5} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{20}{6} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{10}{3}$$

El perímetro es:

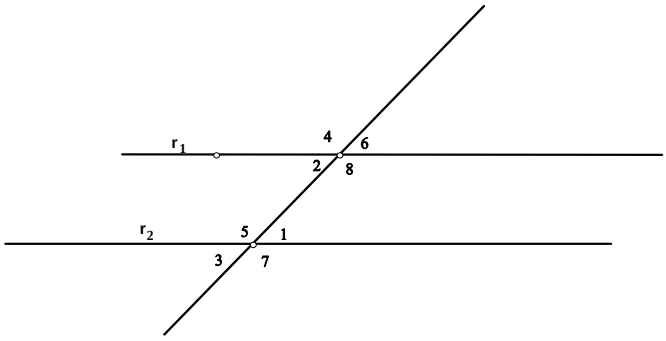
$$perímetro(BCEF) = \overline{EF} + \overline{FB} + \overline{BC} + \overline{CE} = \frac{8}{3} + 4 + 8 + \frac{10}{3} = 18 \ \Rightarrow\ perímetro(BCEF) = 18\,cm$$

4.8 Práctico : Tópicos de Triángulos

Ejercicio 1: Hallar el complemento y el suplemento del ángulo $47^o\ 15'\ 42''$

Ejercicio 2: Hallar el suplemento del ángulo $105^o\ 49'\ 5''$

Ejercicio 3: Se sabe que $\hat{4} = 132^o$ y $r_1 // r_2$, encontrar los otros 7 ángulos.



Ejercicio 4: Sea $\alpha = 32^o\ 7'$, $\beta = 121^o\ 45'\ 56''$, $\gamma = 85^o\ 28'\ 57''$

Obtener

1) $\alpha + \beta$
2) $\beta - \gamma$
3) $\alpha + \beta - \gamma$
4) 2α
5) $\beta : 5 =$
6) $2\alpha + \beta : 5 =$

Ejercicio 5: Completar la siguiente tabla

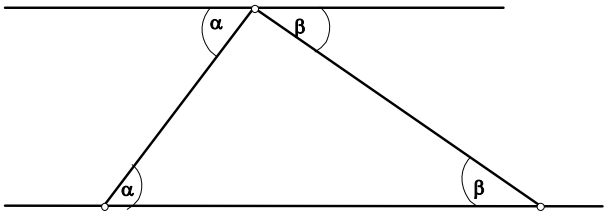
α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	3α	$\beta : 4$
	$48^o\ 28''$			$181^o45'$	
$126^o\ 34'\ 18''$	$72^o\ 27'\ 46''$				
$143^o\ 16'$					$21^o22'46''$

Ejercicio 6: Hallar un ángulo sabiendo que es igual a los tres séptimos de su suplementario.

Ejercicio 7: Un grifo llena 5/12 de un depósito en 1 hora. ¿Cuánto tardará en llenar el depósito completo?.

Ejercicio 8: Un grifo tarda 2 horas en llenar 7 depósitos iguales. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito?.

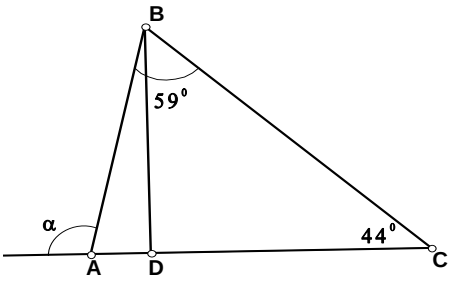
Ejercicio 9: Explicar por qué los ángulos del mismo nombre son iguales



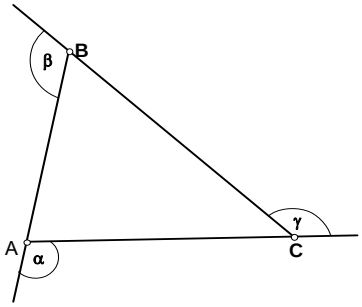
Ejercicio 10: ¿Cuánto miden los ángulos en un triángulo equilátero?

Ejercicio 11: Si en un triángulo isósceles, uno de los ángulos iguales mide $35^{O}10'43''$ ¿cuánto valen los otros dos ángulos?.

Ejercicio 12: Hallar las medidas de los ángulos α y $\hat{A}$.



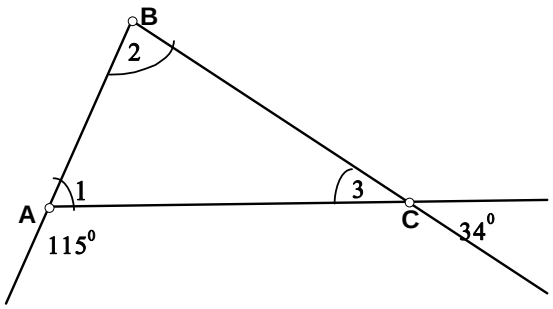
Ejercicio 13: De acuerdo con la figura de análisis, completar el cuadro siguiente.



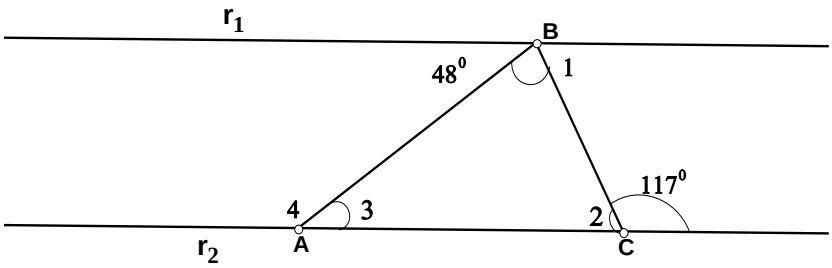
$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
32º	46º				
		20º 25’	53º		
				145º	95º
120º 5”					145º 16’

Ejercicio 14: Calcular los ángulos numerados:

a)



b) $r_1 // r_2$

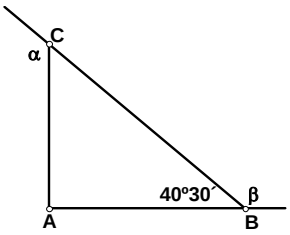


Ejercicio 15: a) Dibujar un triángulo acutángulo.
b) Marcar las alturas, bisectrices y medianas.

Ejercicio 16: a) Dibujar un triángulo obtusángulo.
b) Marcar las alturas, bisectrices y medianas.

Ejercicio 17: a) Dibujar un triángulo rectángulo.
b) Marcar las alturas, bisectrices y medianas

Ejercicio 18: Dado el triángulo $\overset{\Delta}{BAC}$ rectángulo en A y sabiendo que el ángulo con vértice en B mide $40^{o}30'$, calcular la medida de los ángulos α y β indicados en la figura.
Justifica la respuesta.



Ejercicio 19: Si un lado de un triángulo equilátero mide 8 cm, calcular la medida de la altura y el área.

Ejercicio 20: Dado el segmento $\overline{AB}$ de 7.5 cm, hallar un punto C

a) perteneciente al segmento tal que verifique la relación $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{4}$

b) perteneciente a la recta que contiene a $\overline{AB}$, exterior al segmento dado y que verifique $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{4}$

c) Calcular la longitud del segmento $\overline{AC}$ para el item a) y para el b).

Ejercicio 21: Siendo $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ segmentos consecutivos y tales que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{7}{4}$

a) Hallar $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$; $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$; $\frac{\overline{BC}}{AB}$

b) Hallar los segmentos cuyas razones son $\frac{3}{11}$; $\frac{14}{8}$

Ejercicio 22: Dado un segmento $\overline{AB}$, hallar un punto P de la recta que contiene al $\overline{AB}$, tal que se verifique la relación: $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{2}{5}$

Ejercicio 23: Dados los segmentos *a* = 3 *cm*, *b* = *4 cm* y *c* = 5.5 *cm*.
Encontrar geométricamente y analíticamente el segmento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$

Ejercicio 24: Las dimensiones de un rectángulo son 3 *cm* y 4 *cm*. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes a él?.
Cuando lo sean, establecer la razón de semejanza:

a) 45 cm y 60 cm
b) 18 cm y 32 cm
c) 30 m y 40 m

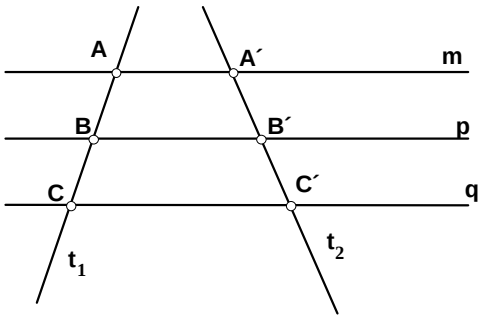
Ejercicio 25: Dado un segmento $\overline{AB}$; dividirlo en 3 segmentos proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Ejercicio 26:

$\overline{AB} = 12\ cm$ $\overline{BC} = 9\ cm$

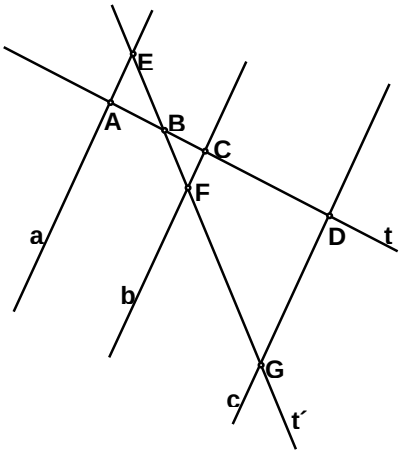
$\overline{A'B'} = x + 1$ y $\overline{B'C'} = x - 1$

a) Calcular *x*
b) Calcular $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$



Ejercicio 27: Siendo *a // b // c*

Escribir cuatro de las proporciones posibles con segmentos incluidos en *t* y *t'*

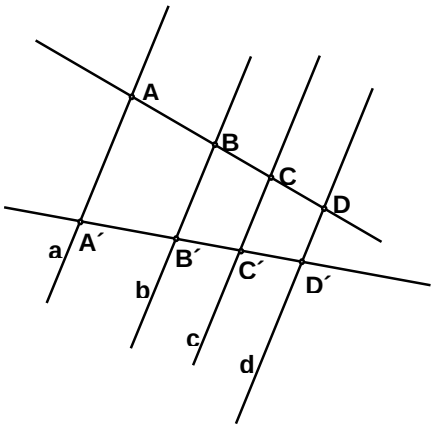


Ejercicio 28: Se sabe que: $\overline{AB} = 3\,m$, $\overline{A'B'} = 5\,m$

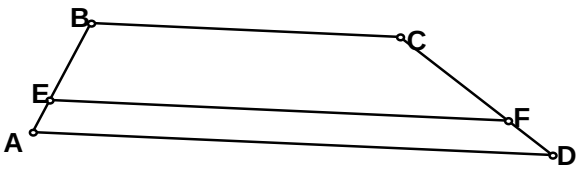
$\overline{BD} = 7{,}5\ m$, $\overline{C'D'} = 2{,}5\,m$

Calcular los valores de los segmentos:

$\overline{B'C'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.



Ejercicio 29: En el trapecio $ABCD$



$EF \parallel BC$

$\overline{AE} = x + 1m$

$\overline{EB} = 2x - 3\ m$

$\overline{CF} = 11m$

$\overline{FD} = 6\,m$

Calcular el segmento $\overline{AB}$

Ejercicio 30: a) Demostrar que los triángulos ADB y ADC son semejantes y son también semejantes al triángulo BAC que es rectángulo en A.

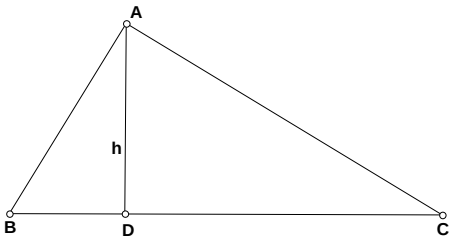
b) Sabiendo que

$\overline{AB} = 15\ m$

$\overline{BC} = 25\ m$

$\overline{AC} = 20\ m$

Calcular los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$



CAPÍTULO

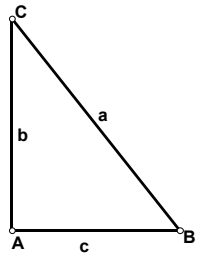
5 Resolución de Triángulos Rectángulos

En la antigüedad la arquitectura (pirámides, templos para los dioses,...) exigió un alto grado de precisión. Para medir alturas se basaban en la longitud de la sombra y el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte. En este procedimiento se utilizó una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, que es lo que conocemos hoy como la ***relación pitagórica****.*

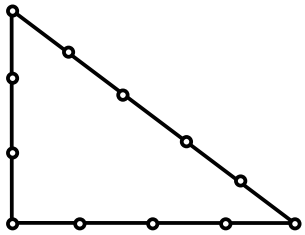
5.1 Triángulos rectángulos

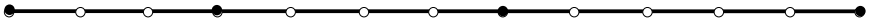
Como ya se ha definido, un triángulo rectángulo es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**.

a : hipotenusa del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BAC}$
b : cateto
c : cateto



El triángulo de lados 3, 4 y 5 unidades, llamado perfecto o sagrado, fue usado por los egipcios para trazar ángulos rectos. En sus papiros se observa que después de las inundaciones del Nilo y construyendo triángulos rectángulos con cuerdas, fijando los límites de las parcelas, trazaban direcciones perpendiculares.



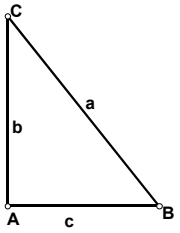


5.2.3 Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A esta relación se le llama relación pitagórica.



5.2.3 El recíproco del teorema de Pitágoras

Si en un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo y el ángulo recto es el ángulo cuyo vértice es A.

Nota: Si tres números, *a, b* y *c* verifican una de las tres relaciones pitagóricas entonces, podemos construir un triángulo rectángulo cuyos lados tienen como longitudes *a, b* y *c.*

Queda para el lector verificar que las ternas de números utilizadas por los egipcios y los hindúes cumplen con la relación pitagórica.

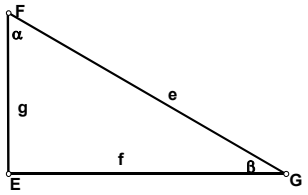
5.2.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Ejemplo 1: Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 *cm* y 5 *cm*. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Solución
Si llamamos: *a* a la hipotenusa; *b* y *c* a los catetos, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos $a^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{169} = 13$
por lo que obtenemos que la hipotenusa mide 13 *cm*

Ejemplo 2: Dado el triángulo de la figura, con los siguientes datos: $e = 9cm$, $g = 4.5cm$ y $\beta = 30^{\circ}$. Calcular : f y α

Solución



Al aplicar el teorema de Pitágoras, tenemos:

$e^2 = f^2 + g^2$
al reemplazar por los datos, tenemos:
$e^2 = f^2 + 4.5^2 \Rightarrow f^2 = g^2 - 4.5^2 = 60.75$
$\Rightarrow f = \sqrt{60.75} \cong 7.8$

Por lo tanto: $f \cong 7.8\,cm$

Para calcular el ángulo α, tenemos que α y β son complementarios (¿Porqué?), por lo tanto:

$\alpha = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$

Ejemplo 3: Dado el $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que:

a) $a = 10cm$, $b = 8\,cm$ y $c = 6\,cm$

b) $a = 9\,cm$, $b = 11cm$ y $c = 5\,cm$

Decidir si los datos dados en a) y/o en b) corresponden a un triángulo rectángulo.

Solución

Tenemos que aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras
Para los datos dados en **a)**, si es rectángulo, la hipotenusa debería ser *a* y lo otros dos los catetos, en consecuencia debería cumplirse:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(1) $a^2 = 100$

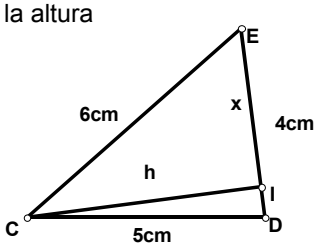
(2) $b^2 + c^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

Por (1) y (2), se cumple el teorema de Pitágoras, por lo tanto con estos datos el $\overset{\Delta}{ABC}$ es rectángulo en *A*.
Para los datos dados en **b)**, si es rectángulo, la hipotenusa debe ser *b* y lo otros dos los catetos, en consecuencia debe cumplirse:

$$b^2 = a^2 + c^2$$
$$(1)\ b^2 = 121$$
$$(2)\ a^2 + c^2 = 9^2 + 5^2 = 106$$

Por (1) y (2), tenemos que no se cumple el teorema de Pitágoras, por lo tanto con estos datos el $\overset{\Delta}{ABC}$ no es rectángulo.

Ejemplo 4: Dado un triángulo de lados 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm*, calcular la altura sobre el lado menor y el área.



Solución
Al observar la figura, vemos que la altura divide al triángulo dado en dos triángulos: $\overset{\Delta}{CID}$ y el $\overset{\Delta}{CIE}$.
Al considerar estos triángulos rectángulos y aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 6^2 &= h^2 + x^2 \\ 5^2 &= h^2 + (4-x)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 36 = h^2 + x^2 \\ 25 = h^2 + (4-x)^2 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, tenemos: $h \cong 4.96cm$, $x \cong 3.38cm$ y $A \cong 9.90cm^2$

La altura pedida es de 4.96 cm y el área es de 9.90 cm^2

5.2 TRIGONOMETRÍA

La trigonometría plana tiene como objetivo resolver triángulos. Cada triángulo está constituido por seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo, significa determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos.

5.2.3 Razones trigonométricas del triángulo rectángulo

Dado cualquier triángulo rectángulo *ABC*, se pueden considerar las siguientes razones entre los lados del triángulo:

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{b}{c} \qquad (1)$$

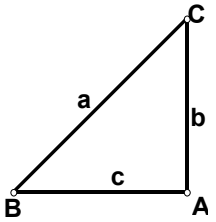
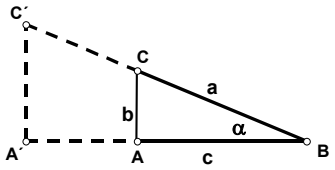


Figura 1

Dado cualquier otro triángulo semejante al dado, por ejemplo, el $\overset{\Delta}{A'BC'}$, tenemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}},\quad \frac{c}{a} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}},\quad \frac{b}{c} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BA'}}$$



Por lo que podemos afirmar:

> Las razones dadas en (1), no dependen de la longitud de los lados, sino de la medida del ángulo y se las llama **razones trigonométricas**.

Definición: Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo *ABC*, como el dado en la figura 1, son:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adyacente\ de\ \alpha}{hipotenusa}$$

$$tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ opuesto\ de\ \alpha}{cateto\ adyacente\ de\ \alpha}$$

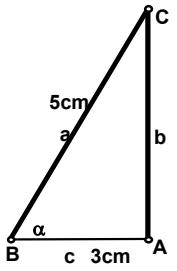
Nota 1: Si bien hay otras 3 funciones trigonométricas, no vamos a tratarlas aquí.

Nota 2: Observamos que tanto el seno como el coseno son relaciones entre un cateto y la hipotenusa, en tanto que la tangente es una relación entre catetos.

Ejemplo 1: Encontrar el valor exacto de cada una de las tres funciones trigonométricas.

Solución

Para encontrar la longitud del cateto desconocido se usa el Teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$b = \sqrt{16} = 4cm$$

Ahora podemos calcular las razones pedidas:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{4}{5},\ cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{3}{5},\ tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{4}{3}$$

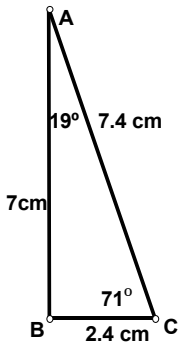
Ejemplo 2: Calcular las razones trigonométricas del triángulo rectángulo de lados 7 *cm*; 7,4 *cm* y 2,4 *cm*. para el ángulo de 19º.

Solución

Como el triángulo es rectángulo, el mayor de los lados es la hipotenusa, o sea 7,4 *cm*. y el otro ángulo mide: $90^o - 19^o = 71^o$

Sabemos que a mayor ángulo se opone mayor lado, obtenemos la siguiente figura.

Con lo cual, ahora podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 19º.



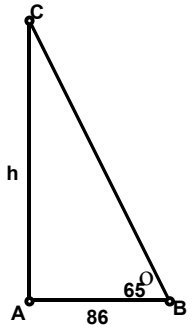
$$sen\ 19^o = \frac{2.4}{7.4} = 0.324),\ \ cos\ 19^o = \frac{7}{7.4} = 0.945)$$

$$tg\ 19^o = \frac{2.4}{7} = 0.3428571...$$

Nota: Se pueden obtener en forma inmediata las razones trigonométricas para el ángulo 71°.

Ejemplo 3: Si los rayos del sol forman un ángulo de 65° con el suelo y, la sombra de un mástil es de 86 *cm*. ¿Cuál el la altura del mástil medido en metros?

Solución



$$tg\,65^{\circ} = \frac{h}{86} \Rightarrow h = 86.tg\,85^{\circ}$$

Usando la calculadora tenemos que $tg\,65^{\circ} \cong 2.14445069$ y en consecuencia:

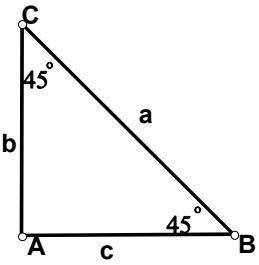
$$h \cong 184.4276cm \cong 1.84m$$

El mástil mide aproximadamente 1.84 *m*

5.2.3 Cálculo exacto de las razones trigonométricas para ángulos particulares

A veces, necesitamos y podemos calcular algunas razones trigonométricas para unos determinados ángulos:

1) Ángulo de 45º



Tenemos un triángulo rectángulo e isósceles (es una de los dos escuadras clásicas). Se calcula la hipotenusa suponiendo los lados iguales $b = c$ y se pueden suponer , sin pérdida de generalidad, de valor 1.

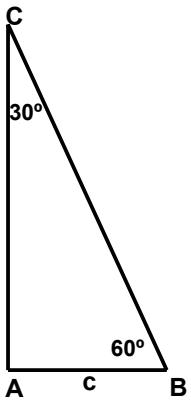
$$a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$$

Supongamos que $b = 1$, tenemos: $a = \sqrt{2}$, y como puede observarse

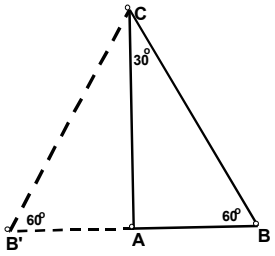
$sen\ 45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $cos\ 45^{o} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ son iguales y $tg\ 45^{o} = 1$

2) Ángulos de 30º y 60º

Esta es la otra escuadra clásica:



Usando esta escuadra, se le adosa otra escuadra, como lo muestra la figura siguiente, y obtenemos un triángulo equilátero, ya que todos sus ángulos miden 60º.



Como el tamaño no afecta a los cálculos, podemos suponer que cada lado mide 2 unidades.
La altura h del triángulo es:

$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ usando el Teorema de Pitágoras

$\text{sen } 30^o = \frac{1}{2}$ $\quad sen\ 60^o = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 30^o = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad cos\ 60^o = \frac{1}{2}$

$tg\ 30^o = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tg\ 60^o = \frac{h}{1} = \sqrt{3}$

Nota: Se observa que: $sen\ 30^o = \frac{1}{2} = cos\ 60^o$, $\quad cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen\ 60^o$

No pasa lo mismo para las tangentes, ya que una es la recíproca de la otra: $tg\ 30^o = \frac{1}{tg 60^o}$

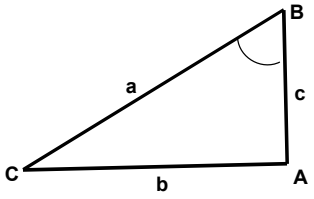
EJERCICIO

1: Si nos alejamos en la línea recta 30 *m*, sólo hay que levantar la vista 30º para ver la punta de la antena. ¿Cuál es la altura de la antena?.

Observación: Los valores obtenidos pueden sintetizarse en la siguiente tabla:

Ángulo en grados	0º	30º	45º	60º	90º
$sen\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no está definida

5.2.3 Algunas relaciones fundamentales



1º Relación : Esta tiene que ver con el Teorema de Pitágoras. En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tenemos:

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad b = a\ sen\ \hat{B}$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad c = a\ cos\ \hat{B}$$

Por Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ sustituyendo por las fórmulas anteriores obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(a\, sen\, \hat{B}\right)^2 + \left(a\, cos\, \hat{B}\right)^2 = a^2\left(sen^2\, \hat{B} + cos^2\, \hat{B}\right)$$

y dividiendo por a^2 obtenemos:

$$\boxed{sen^2\, \hat{B} + cos^2\, \hat{B} = 1}$$

2º Relación:

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ obtenemos: $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$, $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}$, $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{B}}$

$$\boxed{tg\,\hat{B} = \frac{sen\hat{B}}{cos\hat{B}}}$$

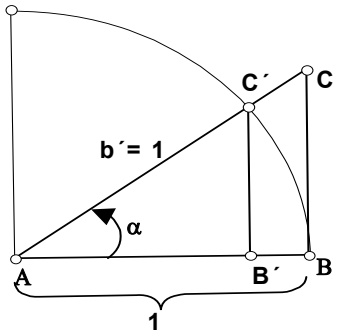
3º Relación:

Si α es un ángulo agudo ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) entonces:

$$0 < sen\alpha < 1$$

$$0 < cos\,\alpha < 1$$

$$tg\alpha > 0$$



Nota: El $sen\,\alpha$ y $tg\,\alpha$ crecen al crecer el ángulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$. En cambio el $cos\,\alpha$ decrece al crecer el ángulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 1: Sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{3}$ encontrar las otras dos razones trigonométricas.

Solución

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha \quad \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

y $$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 2: Sea $tg\ \alpha = 3$ calcular $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$

Solución

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \quad \Rightarrow \quad sen\ \alpha = 3\,cos\ \alpha$$

reemplazando en la 1º relación: $sen^2\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ resulta:

$$(3\ cos\ \alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 9\ cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 10\,cos^2\,\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\,\alpha = \frac{1}{10}$$

Por lo tanto: $cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y $sen\ \alpha = 3.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3.\sqrt{10}}{10}$

5.3 ÁNGULOS ORIENTADOS

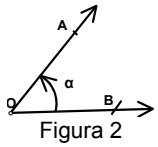
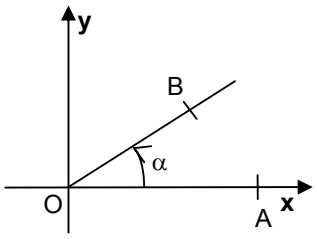


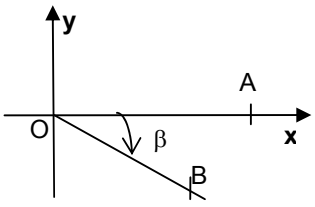
Figura 2

Recordemos que un ángulo es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo.
La posición inicial se llama **lado inicial**, $\overline{OA}$, la posición final se llama **lado terminal,** $\overline{OB}$ **.** El punto fijo se llama **vértice**, *O*, (ver figura 2).
Si la rotación se realiza en sentido antihorario (levógiro) el ángulo se considera **positivo**, como en la figura 2, en caso contrario **negativo** (dextrógiro).

Representamos los ángulos orientados referidos a un par de ejes perpendiculares ***x*** e ***y***, llamados **ejes cartesianos ortogonales**. Dada una semirrecta con origen en el origen de coordenadas y coincidiendo con el semieje positivo ***x***, al rotarla genera un ángulo, ver figura 3.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Figura 3

Diremos que un ángulo está en **posición normal** si su vértice está en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje ***x***.
La figura 3, muestra como los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro partes, llamados cuadrantes. Diremos que un ángulo pertenece a un cuadrante dado si en él está ubicado el lado terminal del ángulo. En la figura 3, se muestra un ángulo α positivo, en el primer cuadrante y un ángulo β negativo, ubicado en el cuarto cuadrante.

No hay límite para la magnitud de un ángulo. Si una semirrecta efectúa una rotación completa en sentido antihorario, habrá generado un ángulo de 360º o ángulo completo. Dos rotaciones completas en el mismo sentido generarán un ángulo de 720º. Si lo hacen en sentido contrario determinarán ángulos negativos.

Dos ángulos orientados son iguales si y sólo si están generados por la misma rotación

.

La figura 4 muestra dos ángulos distintos a pesar que coinciden los lados iniciales y los lados terminales.

$\alpha \neq \beta$

$\beta = \alpha + 2\pi$

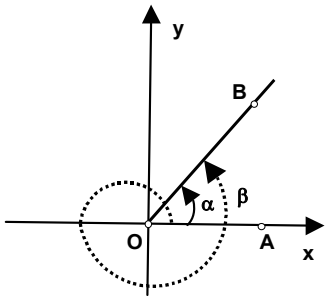


Figura 4

5.4 SISTEMA CIRCULAR: OTRA FORMA DE MEDIR ÁNGULOS

Además del sistema sexagesimal que es la forma usual de medir ángulos en la vida cotidiana, existen otros sistemas para medir ángulos, entre ellos el sistema circular. La ventaja de este sistema es que medimos los ángulos en radianes, que son ***números reales****.*

5.4.1 Radianes

La longitud de una circunferencia de radio *r* está dada por la fórmula:

$$L = 2\pi r$$

En el caso de una circunferencia unitaria, es decir, una circunferencia de radio *r* =1, la longitud es de 2π.

Consideremos el arco ***AB*** y sea ***s*** la longitud de dicho arco. La medida de un ángulo en radianes es:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{longitud\ del\ arco}{radio} \qquad (1)$$

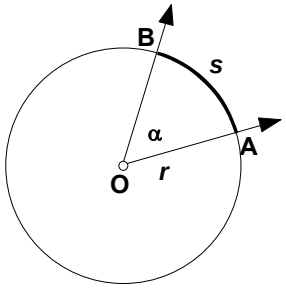


Figura 5

Por ejemplo, un ángulo completo mide 2π radianes, un ángulo llano, π radianes y un ángulo recto $\frac{\pi}{2}$ radianes, o en forma aproximada, 6.28 radianes, 3.14 radianes y 1.57 radianes, respectivamente.

Con cualquiera de los datos obtenidos se pueden obtener las fórmulas de conversión de ángulos medidos en radianes a ángulos medidos en grados y viceversa.
Dado que un ángulo llano es equivalente a π radianes, obtenemos:

$$\pi \, radianes = 180^{o}$$

Por lo tanto

1 radián = $\frac{180}{\pi}$ **grados** $\cong 57.30^{o}$

$\mathbf{1}^{o} = \frac{\pi}{180}$ **radianes** $\cong 0.00075$ *rad*

Nota: Utilizaremos ***rad*** como abreviatura de radianes.

Observación: Recordemos de geometría que, dadas dos circunferencias concéntricas de radios *r* y *r´*, respectivamente, para un mismo ángulo α que subtiende los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{A'B'}$ (ver figura 6), se cumple: $\frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{r'}$. En consecuencia, la razón dada en (1) sólo depende del ángulo y por esto, se la toma como medida del ángulo.

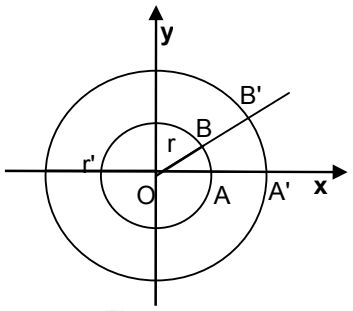


Figura 6

En particular, si *r* = 1 resulta que la medida de α es $\overset{\frown}{AB} = s$.

Ejemplo1: ¿Cuántos grados hay en un ángulo de $\frac{1}{9}\pi \, rad$?

Solución
Por lo visto anteriormente tenemos:
1 *rad* = $\frac{180}{\pi}$ *grados*
por lo tanto:
$\frac{1}{9}\pi \, rad = \frac{1}{9}\pi \ \frac{180}{\pi}$ grados = 20^{o}

Cuando se usa la calculadora para calcular el valor de las razones trigonométricas, verificar que se encuentra en **Modo Grados** (sexagesimales) o **Modo Radianes** según sea la medida que se está usando.

Ejemplo 2: ¿Cuántos radianes hay en un ángulo de 60^{o}?

Solución

En forma análoga al ejercicio anterior, pero utilizando la fórmula $1^{o} = \frac{\pi}{180} \, rad$

Tenemos: $60^{o} = 60 \ \frac{\pi}{180} \, rad = \frac{\pi}{3} \, rad = 1.05 \ rad$

Haciendo los cálculos correspondientes, podemos realizar la siguiente tabla:

grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5.5 LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Sea $C(O,1)$ una circunferencia con centro en el origen de coordenadas $\boldsymbol{O}(0, 0)$ y radio la unidad. Si se construye un ángulo α con vértice en el origen y sentido positivo podemos obtener las razones trigonométricas de ese ángulo llamadas funciones o líneas trigonométricas. Se determinan los triángulos $\overset{\Delta}{OBA}$ y $\overset{\Delta}{OB'A'}$ tales que: el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud b, el $\overline{OB}$ longitud a, el $\overline{A'B'}$ tiene longitud b' y $\overline{OA}$ y $\overline{OB'}$ por construcción tienen longitud 1, es decir, $A(a,b)$, $B(a,0)$, $A'(1,b')$, $B'(1,0)$.

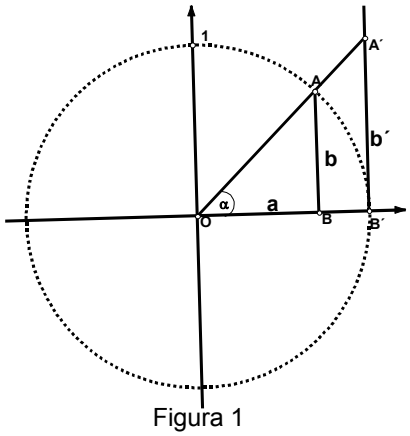


Figura 1

Con estos datos obtenemos :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} = b$$ o sea el seno es la ordenada del punto A.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} = a$$ el coseno es la abscisa del punto A.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'} = b'$$ es la ordenada del punto A'

Observación: Escojamos otro punto P' cualquiera, a una distancia $\rho > 0$ sobre el lado terminal de α. P' con coordenadas (x', y') determina un triángulo $\overset{\Delta}{OP'Q'}$ semejante al $\overset{\Delta}{OPQ}$,

donde: $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$,es decir:

$\frac{y'}{\rho} = \frac{y}{1} = sen\,\alpha$.

Del mismo modo se obtiene:

$$cos\,\alpha = \frac{x'}{\rho},\ tan\,\alpha = \frac{y'}{x'}.$$

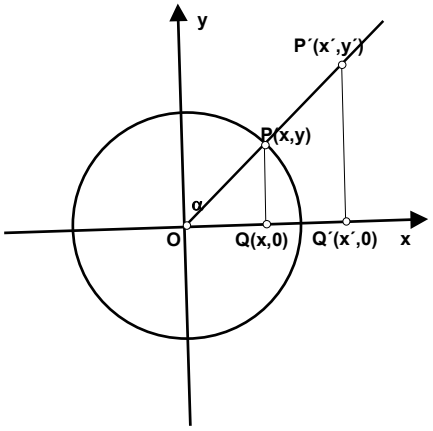


Figura 2

Por tanto, **el valor de cualquier línea trigonométrica de un ángulo depende solamente de la magnitud del ángulo y no del punto que se haya tomado sobre el lado terminal.**

En particular obtenemos las identidades: $cos(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha$, $sen(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha$.
Por esta razón, se las llama funciones periódicas, y en este caso, son de período 2π .

Una ecuación del círculo unitario con centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Ya que $x = cos\,\alpha$ e $y = sen\,\alpha$ se sigue que:

$$\boxed{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$$

que es una de las relaciones fundamentales de la trigonometría.

Ejemplo 1: Hallar las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por cada uno de los siguiente puntos :

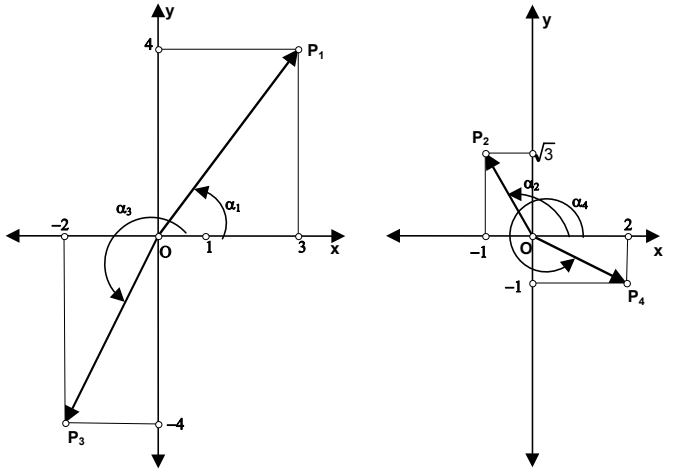
a) $P_1(3,4)$; b) $P_2\left(-1,\sqrt{3}\right)$; c) $P_3(-2, -4)$; d) $P_4\ (2, -1)$

¿Qué conceptos teóricos utiliza?

Solución

b) $\rho = 2;\ sen\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\alpha_2 = -\dfrac{1}{2};\ \tan\alpha_2 = -\sqrt{3}$

Queda para el lector completar. En las siguientes figuras se muestran gráficamente la solución.



5.5.1 Signo de las líneas trigonométricas

El signo de las líneas trigonométricas de cualquier ángulo, depende de los signos de las coordenadas de un punto cualquiera del lado terminal ya que $\rho > 0$. Así, en el primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas, por lo tanto seno y coseno son positivos y como consecuencia todas las demás. Tenemos entonces el siguiente cuadro:

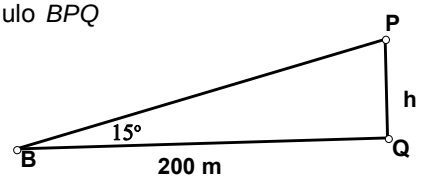
α	I	II	III	IV
$sen\,\alpha$	+	+	-	-
$cos\,\alpha$	+	-	-	+
$tan\,\alpha$	+	-	+	-

Queda para el lector hacer figuras similares a la figura 2 para los cuadrantes restantes.

5.6 SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1: Un cohete dista 200 m de la puerta y desde ella se observa el extremo del cohete formando un ángulo de 15º por encima de la horizontal. Calcular la altura que está el cohete.

Si hacemos un esquema tenemos un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BPQ}$



$$tg\ 15^o = \frac{h}{200} \Rightarrow h = 200 \cdot tg15^o =$$

$$\cong 200 \cdot 0.26799491$$

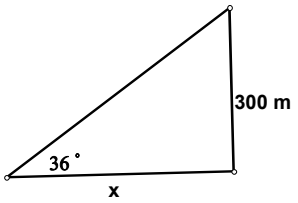
$$\cong 53.589839$$

El cohete está a aproximadamente a 53.60 *m*

2: Sabiendo que la torre Eiffel mide 300 m de altura ¿cuánto hay que alejarse para que su extremo se vea, desde el suelo, 36º por encima de la horizontal.

Solución

Haciendo un esquema



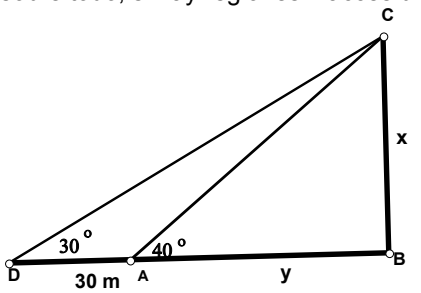
$$\text{tg } 36^o = \frac{300}{x} \Rightarrow x\ \text{tg}36^o = 300\ m \Rightarrow$$

$$x = \frac{300m}{tg\ 36^o} = \frac{300}{0.7265} = 412.938\ m$$

Debe alejarse de la torre casi cuatro cuadras.

3: A veces, necesitamos usar triángulos superpuestos, sobre todo, si hay regiones inaccesibles.

Desde un patio vemos el extremo superior de una antena de televisión levantando la vista un ángulo de 40°. Si nos alejamos en la línea recta 30 m, solo hay que levantar la vista 30º para ver la punta de la antena. ¿Cuál es la altura de la antena?.



Solución

Aquí se tienen dos triángulos, cada uno de ellos con datos insuficientes para resolver el problema. Utilizando ambos, en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tenemos:

$tg\ 40^o = \frac{x}{y}$ no se conoce x ni y de estos datos, pero como la tangente $tg\ 40^o \cong 0.839$

$$0.839 = \frac{x}{y} \Rightarrow x = 0.839\,y$$

En el triángulo $\overset{\Delta}{DBC}$ tenemos: $tg30^o = \frac{x}{30+y} \Rightarrow 0.577 = \frac{x}{30+y} \Rightarrow x = 0.577\,(30+y)$

En consecuencia tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en las cuales se despeja x

$$\begin{cases} x = 0.839\ y \\ x = 0.577\ (30+y) \end{cases}$$

igualando obtenemos: $0.839y = 0.577(30+y) \rightarrow 0.389y = 0.577 \cdot 30 + 0.577y$

agrupando las variables en un solo miembro, resulta:

$$0.839y - 0.577y = 17.31 \quad \Rightarrow \quad (0.839 - 0.577)y = 17.31$$

$$y = \frac{17.31}{(0.839 - 0.577)} = \frac{17.31}{0.262} \cong 66.068702\ m \cong 66.069\ m$$

$$x = 0.839 \cdot y \cong 0.839 \cdot 66.069 \cong 55.38\, m$$

La altura de la antena es aproximadamente 55.38 *m*

5.7 Práctico: Resolución de Triángulos Rectángulos

Ejercicio 1: Se sabe que la diagonal del cuadrado mide 7 *cm*. ¿Cuál es la longitud del lado?.

Ejercicio 2: Calcular el perímetro y el área del triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$ en el que se sabe que:

$\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 24\ cm$ y $h = 5\ cm$ es la altura correspondiente al vértice B

Ejercicio 3: Se sabe que el área del rombo es $\frac{d \cdot D}{2}$, o sea la mitad del producto de las diagonales. Obtener el área del rombo de 40 *cm* de perímetro y la diagonal menor $d = 12\ cm$.

Ejercicio 4: En un triángulo equilátero la altura mide 3 *cm*. ¿Cuánto miden los lados?

Ejercicio 5: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 *cm* y uno de los catetos mide el triple que el otro.

a) ¿Cuánto miden los catetos?
b) Calcular el área.

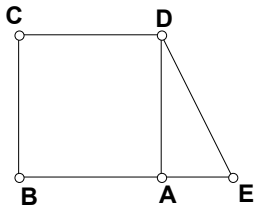
Ejercicio 6: Determinar en cada caso las medidas de las diagonales de los rectángulos de base **b** y altura **h**

a) **b =** 8 *cm* **h** = 6 *cm* b) **b** = 4 *cm* **h =** 8 *cm*

Ejercicio 7: Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado **L** mide:

a) **L=** 2 *m* b) **L=** 0,6 *m* c) **L=** $\sqrt{5}$ *dm*

Ejercicio 8:



El área del cuadrilátero BCDE es de $27\,cm^2$. El área del triángulo ADE es $\frac{1}{3}$ del área del cuadrado ABCD. Calcular la longitud de los lados del triángulo.

Ejercicio 9: Pasar de grados sexagesimales a radianes:

a) 136º b) 45º c) 235º d) 60º e) 300º f) 420º

Ejercicio 10: Pasar de radianes a grados sexagesimales:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{2}$

Ejercicio 11: Si $sen\sigma = \frac{1}{3}$ encuentre el valor exacto de:

a) $cos\ \sigma$ b) $cos(90^o - \sigma)$

Ejercicio 12: Si $tg\ \sigma = 4$ encuentre el valor exacto de $sen\ \sigma$ y $cos\ \sigma$

Ejercicio 13: a) Sabiendo que α es un ángulo agudo tal que $sen\,\alpha = 0.6$. Calcular $\cos\alpha$ *y* $\text{tg}\alpha$

b) Sabiendo que α es un ángulo agudo tal que $cos\,\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Calcular $sen\alpha$ *y* $tg\alpha$

Ejercicio 14: Resolver el triángulo rectángulo, usando la información dada:

I) $b = 5$ $\beta = 25^o$

II) $a = 6$ $\beta = 45^o$

III) $b = 4$ $\alpha = 12^o$

IV) $a = 5$ $\alpha = 30^o$

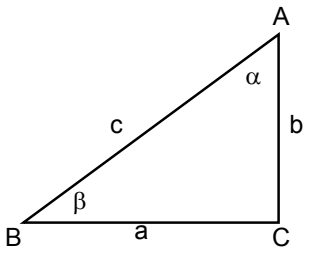
v) $c = 10$ $\alpha = 40^o$

VI) $c = 9$ $\beta = 25^o$

VII) $a = 2$ $b = 8$

VIII) $a = 2$ $c = 5$

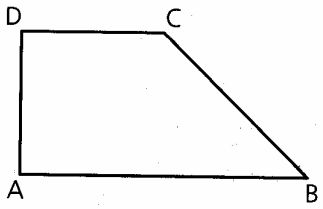
IX) $b = 4$ $c = 6$



Ejercicio 15: Sea *ABC* un triángulo rectángulo en *A*, tal que $\overline{AB} = 4\,cm$ *y* $\overline{AC} = 3\,cm$. Si *A, B, C* son los ángulos, calcular*: cos B, sen B, tg B, cos C, sen C y tg C.*

Ejercicio 16: En un triángulo de lados 4 *cm*, 6 *cm* y 8 *cm*, calcular la altura sobre el lado mayor.

Ejercicio 17: En el cuadrilátero *ABCD*, el lado *AB* tiene el doble de la longitud del lado *CD*. Sabiendo además que los lados *AD* y *CD* son iguales, siendo su medida 3 *cm*, calcular el perímetro y el área del cuadrilátero.



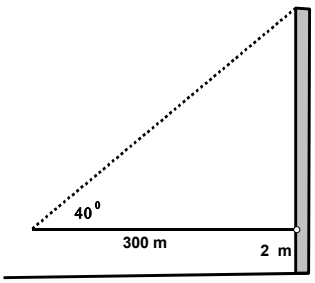
Ejercicio 18: Un tramo de carretera forma un ángulo de 15° con la horizontal. Al recorrer 200 *m* por la carretera, ¿Cuántos metros se ha ascendido en vertical?

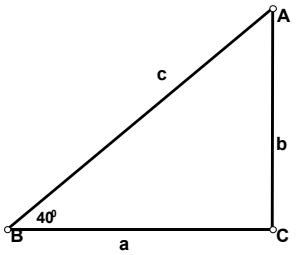
Ejercicio 19: De un rombo se conoce una diagonal, 24 *cm*, y el lado, 13 *cm*. Encontrar la medida de la otra diagonal.

Ejercicio 20: Encontrar la altura de un trapecio isósceles cuyos lados paralelos miden 4 *cm* y 9 *cm* y los otros 6,5 *cm*..

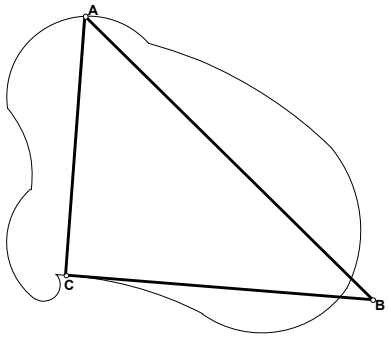
Ejercicio 21: Un camino recto con inclinación uniforme lleva desde un hotel a 2640 metros hasta un mirador situado a 3663 metros. Si la longitud del camino es de 4653 metros. ¿Cuál es la pendiente del camino?.

Ejercicio 22: Para determinar la altura de una torre de transmisión de televisión, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. Luego mide el ángulo de elevación y encuentra que es de 40º. Si el teodolito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?.

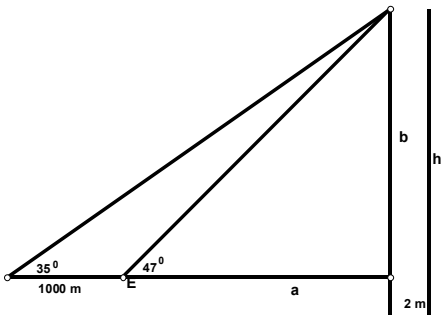




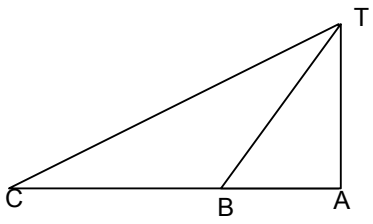
Ejercicio 23: Encuentre la distancia inaccesible $\overline{AC}$, del estanque, sabiendo que $\overline{BC} = 35$ metros y el ángulo $C\hat{B}A = 40^o$.



Ejercicio 24: Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 1000 metros en línea recta hacia la montaña. La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47º, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35º. Si el teodolito está dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?.



Ejercicio 25: En el siguiente dibujo, *AT* representa una torre, *A* el pie de la torre, *B* y *C* puntos alineados con *A*, siendo *BC* = 50 *m*, el ángulo *ABT* = 60º y el ángulo *BCT* = 30 º. ¿Cuál es la altura de la torre?



Ejercicio 26:¿En un viaje por una carretera horizontal y recta nos dirigimos hacia el punto más alto de una montaña. En un instante dado medimos el ángulo de elevación y es, de 30º, Recorremos 2 kilómetros y al medir éste es de 45 º. ¿Cuál es la altura de la montaña respecto de la carretera donde hemos hecho las mediciones?

Ejercicio 27: Una estatua está colocada sobre una columna de 15 metros. Desde un punto del suelo situado en la misma horizontal que el pie de la columna, vemos la columna bajo un ángulo de 45º, y la estatua bajo un ángulo de 15º más, ¿Cuál es la altura de la estatua?

Ejercicio 28: Se sabe que el aro de baloncesto esta a 3,3 metros del piso. Los ojos de un jugador de baloncesto están a 1,98 metros del piso. Si el jugador se encuentra en la línea de tiro libre a 5 metros del centro del aro de la canasta. ¿Cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador al centro del aro?.

Ejercicio 29: Un cierto día de primavera, un edificio de 100 *m* de altura proyectó una sombra de 16,50 *m* de largo. ¿Cuál era el ángulo de elevación del sol?

Ejercicio 30: En un rectángulo, uno de los lados mide 5 *cm* y su área es de 50 cm^2. ¿Cuánto mide la diagonal?.

Ejercicio 31: En un cuadrado, cuyo perímetro es de 8 *cm* se han marcado los puntos medios de los lados. Calcular el perímetro y el área del cuadrado que se obtiene al unir esos puntos.

Ejercicio 32: Se inscribe un cuadrado en una circunferencia de radio $r = 8\,cm$

a) ¿Cuánto miden el lado y la diagonal de ese cuadrado?.
b) Calcular aproximadamente el área de la porción del círculo que no está ocupada por el cuadrado?.
c) Si se quisiera el valor exacto del área pedida en la parte anterior ¿cómo se expresaría?.

Ejercicio 33: En un triángulo rectángulo los catetos miden $3\sqrt{5}$ y $4\sqrt{5}$. ¿Cuánto mide su hipotenusa?. ¿Cuál es su perímetro?.

Ejercicio 34: Encontrar el valor exacto de cada una de las tres funciones trigonométricas de un ángulo positivo si $(4,-3)$ es un punto en su lado terminal.

Ejercicio 35: Dado $sen\,\delta = \frac{1}{3}$ y $cos\,\delta < 0$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras dos funciones trigonométricas.

Ejercicio 36: Utilice la periodicidad de las funciones para encontrar el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

I. $sen\,405^o$

II. $cos\,420^o$

III. $tg\,21\pi$

IV. $cos\,\frac{33\pi}{4}$

.

CAPÍTULO

6 Funciones

Las funciones constituyen una herramienta útil para describir, analizar e interpretar situaciones provenientes tanto de la matemática como de otras ciencias.
La gráfica de una función permite rápida y visualmente tener información de cómo varían las magnitudes que la función relaciona, cuáles son los intervalos de crecimiento, cuáles de decrecimiento, en general cuál es la tendencia del fenómeno que la función describe.
Cuando se necesitan obtener resultados precisos, y manipularlos cuantitativamente se utiliza la expresión algebraica, fórmula o también llamada regla de correspondencia de la función.

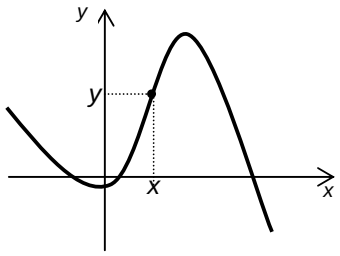
Este capítulo aprenderemos a:

- *Interpretar una función dada mediante su gráfica.*
- *Representar de diferentes maneras las funciones (por fórmulas, por gráficos, por tablas, etc.).*
- *Analizar algunos ejemplos que tienen un comportamiento que puede describirse por una función lineal.*
- *Identificar las características de las funciones lineales.*
- *Obtener la ecuación de una recta y hacer su gráfica.*
- *Relacionar intersección de rectas, rectas paralelas y perpendiculares con las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones lineales.*
- *Resolver problemas donde la función que describe la situación es una recta o trozos de rectas.*
- *Representar las funciones cuadráticas* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *como traslaciones de la parábola* $y = ax^2$.
- *Determinar los puntos de corte de una parábola con el eje x, y su relación con las raíces de la ecuación de segundo grado.*
- *Resolver problemas donde la función que describe la situación es una función cuadrática.*

6.1 FUNCIONES y GRAFICAS

¿Qué es una función?

Una relación entre dos variables, comúnmente designadas por *x* e *y*, se llamará **función** siempre que se pueda encontrar una ley que asigne a cada valor de ***x*** (variable independiente) **un único** valor de ***y*** (variable dependiente). Se dice en este caso que ***y*** es función de ***x***.



Se utiliza un sistema de ejes cartesianos ortogonal para su representación gráfica. Sobre el eje horizontal, eje de abscisas, se representa la variable independiente. Sobre el eje vertical, eje de ordenadas, se representa la variable dependiente.

Las funciones sirven para describir fenómenos físicos, económicos, biológicos, sociológicos o para expresar relaciones matemáticas.

Ejemplos:

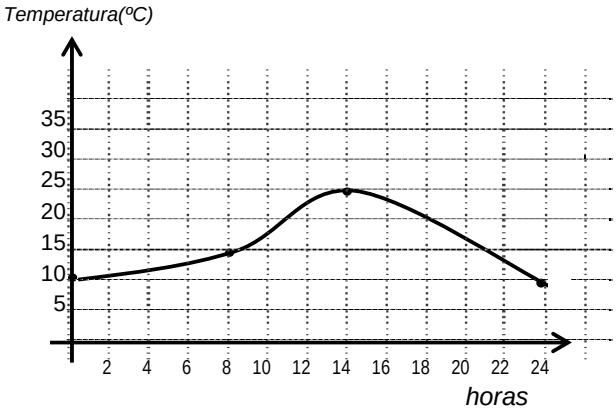
- La presión al variar la profundidad en el mar. La presión es función de la profundidad. *Profundidad = variable independiente; Presión = variable dependiente.*
- Distancia recorrida por un móvil al variar el tiempo; es decir la distancia recorrida es función del tiempo. *Tiempo = variable independiente; Distancia = variable dependiente*.
- El área de un cuadrado al variar la longitud de su lado; el área de un cuadrado es función de su lado.
- El precio de las manzanas al variar las estaciones; el precio de las manzanas es función de los meses del año.

6.1.1 Distintas formas de representación:

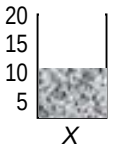
Una función puede darse por su **gráfica**, por un **enunciado** que describe el fenómeno, por una **tabla** o mediante una **fórmula** con la que se relacionan las dos variables.
Analizamos a continuación algunos ejemplos.

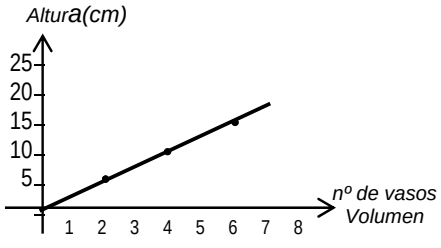
Por su gráfica:

1.- La gráfica describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.
Sobre el eje horizontal los valores representan la variable tiempo medida en horas, y en el eje vertical la temperatura en ºC.
A las 0 horas (12 de la noche) la temperatura fue de 10º, a las 8 de la mañana un poco menos de 15º, a las 14 de 25º.

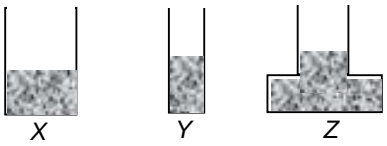


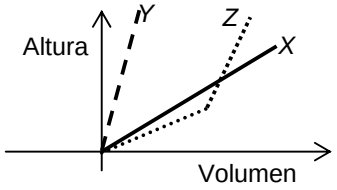
2.- La gráfica muestra cómo varía la altura del líquido en el recipiente *X* a medida que se echa agua con un vaso.
Con dos vasos se alcanza una altura de 5 centímetros. Hemos dibujado la gráfica imaginando que se ha echado el agua en forma continua.



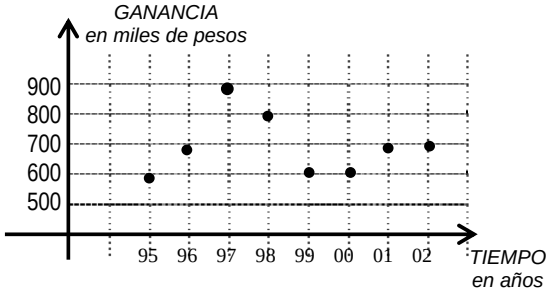


3.- En la siguiente gráfica se muestra aproximadamente la relación altura-volumen para distintas formas de recipientes *X, Y* y *Z*.





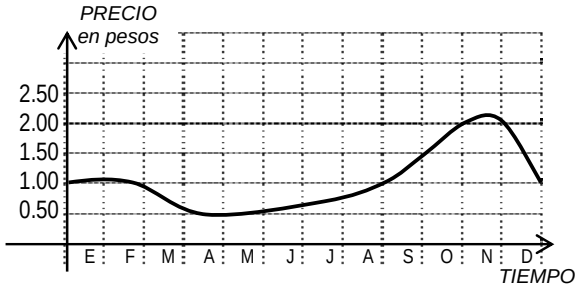
4.- El gráfico representa la ganancia anual de cierta empresa, desde 1995 hasta 2002.
En este caso el dominio de la función es el conjunto de los años {1995,1996,1997,1998,1999,2000, 2001,2002}, tiene dominio discreto.
No deben unirse los puntos del gráfico.



Por un enunciado:

5.- El precio de las manzanas varía a lo largo de un año de la siguiente forma:
En el primer mes de año se mantiene estable a $1.00 por kilo. A fines de febrero comienza a bajar hasta mediados de Abril que llega a $0.50 el kilo manteniéndose hasta fines de Mayo en ese valor, en Junio comienza a subir hasta llegar a poco más de $ 2.00 por kilo. A fines de Noviembre nuevamente baja, teniendo a fin de año un precio de $1.00 por kilo.

Graficamos la situación enunciada marcando en el eje horizontal el tiempo, y en el eje vertical el precio, obtenemos la curva aproximada de la función que describe la variación del precio del kilo de manzanas en función de los días del año.



Por una tabla:

6.- El costo del envío de paquetes postales de hasta de 12 kilos depende del peso del mismo.
La tabla muestra la relación: *peso del paquete-costo*.

peso *en kilos*	menos de 5 *kg*.	de 5 a 5.99	de 6 a 6.99	de 7 a 7.99	de 8 a 8.99	de 9 a 9.99	de 10 a 12
costo *en pesos*	4.50	5	5.50	6.50	7.50	9	11

Por una fórmula:

7.- La fórmula $d(t)=50-5t^2$ describe la caída de una piedra desde un edificio de 50 metros de altura, es decir la fórmula permite calcular la distancia de la piedra hasta el suelo después de *t* segundos.

Veamos como utilizar la fórmula para responder algunas preguntas:

- ¿A qué altura se encuentra la piedra después de 2 segundos?

Se calcula *d*(2), o sea $50-5\cdot 2^2=30$.

Después de 2 segundos la piedra se encuentra a 30 metros de altura.

- ¿En que instante la piedra toca el suelo?

Observar que estamos buscando altura cero; $d(t)$ describe la altura de la piedra en función del tiempo por lo tanto se resuelve la ecuación $0 = 50 - 5t^2$

$50 - 5t^2 = 0 \;\Rightarrow\; 50 = 5t^2 \;\Rightarrow\; 10 = t^2 \;\Rightarrow\; t = \pm\sqrt{10}$, por lo tanto, $t = \sqrt{10}$

La piedra toca el suelo después de 3 segundos.

8.- El área de un cuadrado se puede expresar en función del lado. Si el lado del cuadrado es *x*, la fórmula de la función área es $A(x) = x^2$.

- ¿Cuál es el área en cm^2 de un cuadrado de lado 0.55 *m*?

Reemplazando en la fórmula $A(0.55) = 0.55^2 = 0.3025\, m^2$

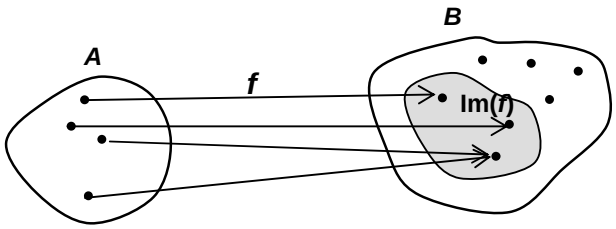
El área es de 3025 cm^2.

9.- El volumen de una esfera se puede expresar en función de su radio: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Conocer la fórmula o regla de correspondencia de la función, permite obtener con precisión los valores de la función a partir de los valores de la variable independiente.

6.2 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función ***f*** queda determinada por un conjunto ***A***, llamado *dominio*, un conjunto B y una ley de correspondencia que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A **un único** elemento ***y*** del conjunto *B*.
Se escribe $f : A \to B$ (se lee la función *f* de *A* en *B*)



Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra función, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra función para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación *y=f(x).*

6.2.1 Funciones de una variable real

Las funciones que más nos van a interesar en matemáticas son las funciones numéricas.
Consideraremos que ***x*** toma valores sobre un subconjunto de los números reales y, los correspondientes valores de ***y*** también serán reales, de modo que estudiaremos funciones reales de una variable real.

Sea *A* un subconjunto de **R** ($A \subset \mathbf{R}$), una función *f* de *A* en **R** ($f : A \to \mathbf{R}$) es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento ***x*** de *A* un único elemento ***y*** de **R**.

***R**: conjunto de números reales.*
***R**$^+$: reales positivos,*
***R**$^-$: reales negativos.*

*Para designar funciones arbitrarias usualmente usaremos las letras **f, g, h, F,G,C, V,** etc.*

Dominio es el conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente; será un subconjunto no vacío de números reales o todo **R**.

Imagen o **rango** es el conjunto de los valores que toma la variable dependiente o sea todas las imágenes de los elementos del dominio; para el caso de funciones de variable real, será un subconjunto no vacío de números reales o todo **R**.

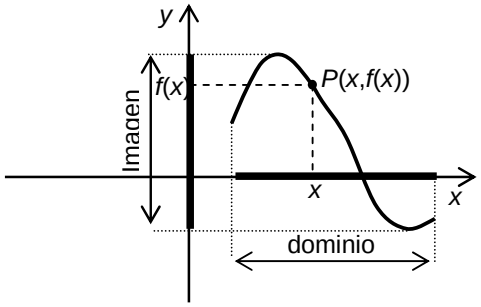
Si ***f*** es una función, el símbolo ***f(x)*** (se lee *f* de *x*) representa la operación que debe hacerse con ***x*** para obtener ***y*** o sea ***f(x) = valor de f en el número x .***

En símbolos $x \alpha \ y = f(x)$.

Por ejemplo, si $f(x)=3x^2+4$, $f(2)=3.2^2+4=16$

Una función de variable real se representa gráficamente en el plano cartesiano.

El **gráfico** de una función ***f***: $A \rightarrow \mathbf{R}$, (con *A* subconjunto de **R,** dominio de *f*) es el conjunto de todos los puntos $P(x,f(x))$ del plano.
Es decir es el conjunto de todos los pares ordenados, cuyo primer elemento pertenece al dominio de *f* y el segundo a su imagen, que es un subconjunto de **R**.



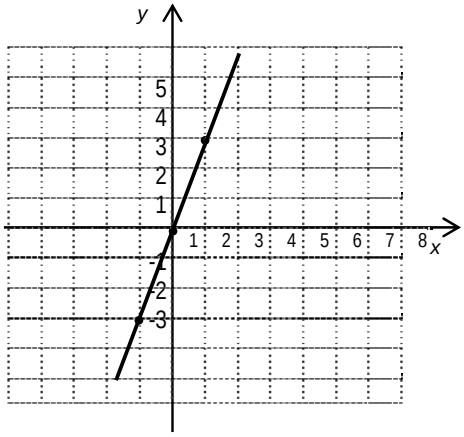
Ejemplos

1. A cada número real x le asignamos su triple, es decir, 3*x*

En símbolos $x \alpha \ f(x) = 3x$.

Damos algunos valores para *x,* y obtenemos los correspondientes valores de *y*.
Los anotamos en una tabla:

x	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	2	4	-2	$\frac{2}{3}$
y=*f*(*x*)=3*x*	0	3	-3	$\frac{3}{2}$	6	12	-6	2



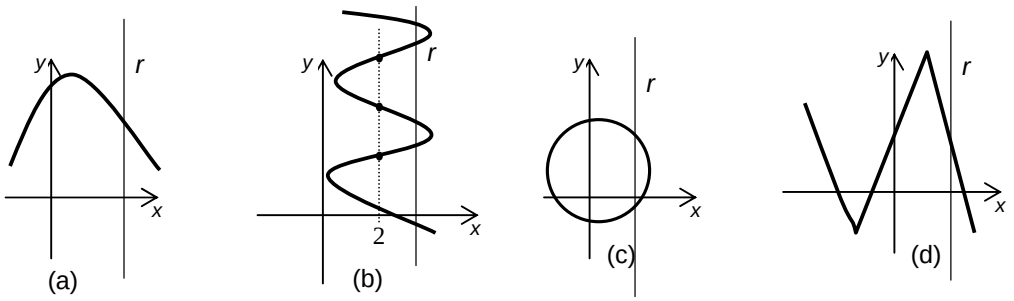
Un punto (*x,y*) pertenecerá al gráfico de esta función si y sólo si, ***y*** es el triple de ***x*** .

Los puntos (0,0), (1,3), (-1,-3)... de la tabla pertenecen al gráfico, pero el gráfico de la función está formado por **todos** los pares (*x*,*y*) donde *x* es un número real e $y = 3x$, por eso dibujamos una línea continua.

El dominio de esta función es **R** y la imagen también es **R**.

La expresión $y = 3x$ se llama fórmula, ecuación, fórmula o ley de correspondencia de la función.

2.- ¿Cuándo un gráfico representa una función y cuándo no?



La gráfica (a) representa una función, porque para cada *x* le corresponde un único *y*.

La segunda (b) no lo es, porque para algunos valores de *x*, por ejemplo para *x=2* le corresponden varios valores de *y*.

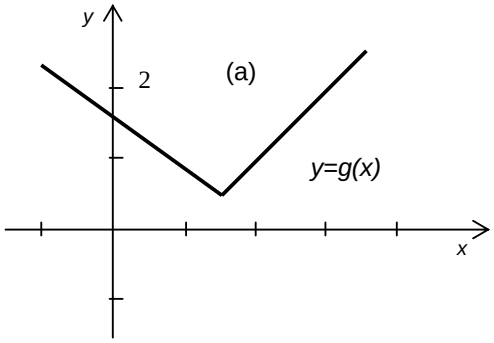
El gráfico (c), de una circunferencia no es función.

(d) si lo es, para cada *x* hay un único *y*.

Recordar

*Un gráfico representa una función si dada cualquier recta r paralela al eje **y**, ésta corta al gráfico en un único punto.*

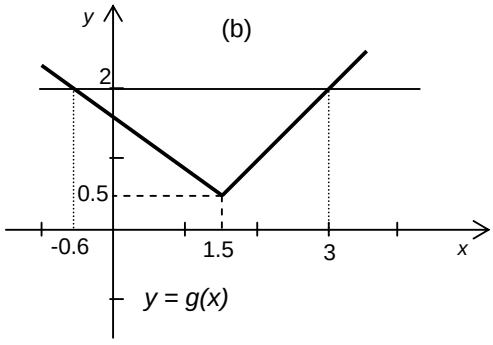
3.- Para la función $y = g(x)$ del gráfico de la figura siguiente (a).



¿Qué valores del dominio tienen como imagen el número 2? .
¿Cuál es el valor de la función en 1.5?

La primer pregunta se puede traducir así: encontrar los valores de *x* tales que *g(x)=2*; y la segunda calcular *g*(1.5).

Para responder las preguntas seguir los siguientes pasos en el gráfico de la función (b).



Trazar una recta horizontal por *y=2*.
Bajar desde los puntos de corte con la gráfica una perpendicular hasta cortar el eje *x*.
Estos valores de *x*, son los que cumplen la condición: *g(x)*=2.
g(3)=2 y *g*(-0.6) = 2, es decir los valores del dominio son *x* =-0.6 y *x*=3.

Para determinar *g*(1.5), marcar el punto 1.5 en el eje de las abscisas, levantar una perpendicular hasta encontrar el gráfico, y proyectar ese valor en el eje *y*. Observar que *g*(1.5) = 0.5.

EJERCICIOS

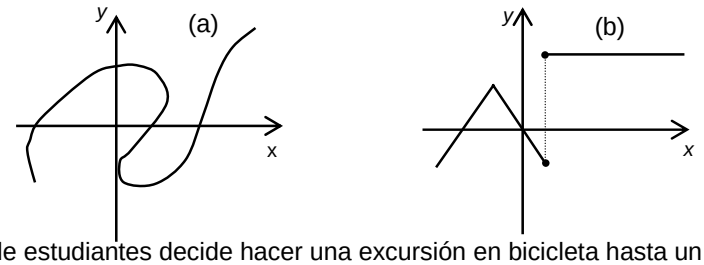
1.- Se estudia la evolución del peso de un paciente obeso, se cuenta con los siguientes datos: Comenzó el tratamiento con 100 *kg*. de peso; el tratamiento duró 10 meses; bajó 4 *kg*. el primer mes; 3 *kg*. el segundo, 2.5 *kg* el tercero, y luego a razón de 1 *kg*. por mes.

(a) Hacer un gráfico del peso que perdió el paciente mes por mes. Marcar en el eje horizontal el MES y en el vertical el PESO PERDIDO en kilogramos.

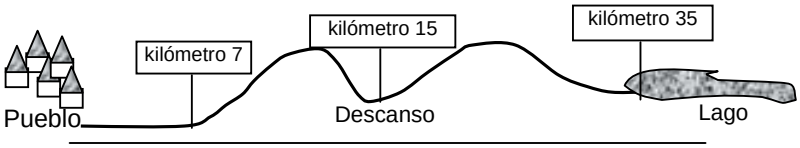
(b) Hacer un gráfico que describa la evolución del peso del paciente respecto de los meses de tratamiento. En eje horizontal marcar el MES y en el vertical el PESO del paciente.

(c) Al aumentar el número de meses de tratamiento, ¿aumenta o disminuye el peso que pierde el paciente? ¿aumenta o disminuye el peso del paciente?. Para contestar observar las gráficas obtenidas en a) y b).

2.- Explicar porqué las gráficas que se muestran en la figuras (a) y (b) no son gráficas de una función.

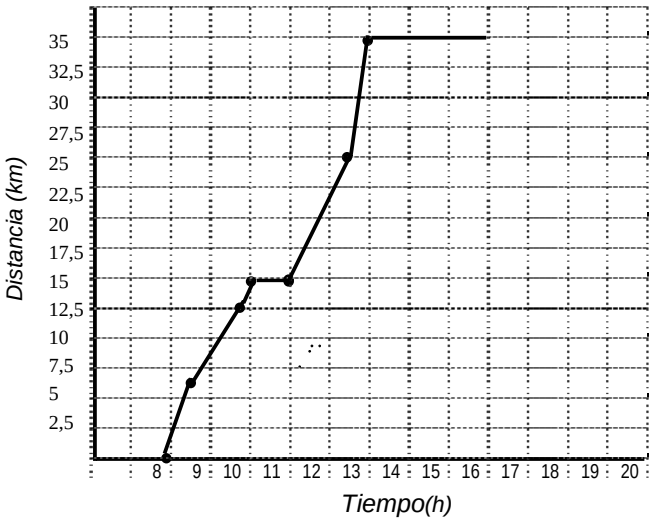


3.- Un grupo de estudiantes decide hacer una excursión en bicicleta hasta un lago ubicado a 35 *Km*. de su pueblo, almorzar allí y luego regresar. Para llegar hay que seguir un camino con subidas y bajadas.



PERFIL DEL TRAYECTO

Usando las representaciones contestar las siguientes preguntas:



a) ¿A qué hora partieron?
b) ¿Cuántos kilómetros recorrieron aproximadamente desde el comienzo de la primer cuesta hasta la cima?
c) ¿Cuánto tiempo se detuvieron a descansar en la hondonada?
d) ¿Qué distancia aproximada hay desde la hondonada hasta el lago? ¿Cuánto tardaron en recorrerla?
e) ¿Cuánto tiempo usaron para almorzar y descansar?
f) Completar el gráfico tiempo-distancia, dibujando una curva posible que describa el trayecto de regreso.

4.- Sea ***f*: R→R** , una función definida por $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

Calcular $f(0)$; $f(\frac{5}{2})$ y $f(\sqrt{2})$; $f(h+1)$.

5.- Sea ***g*: R→R** , una función definida por $g(x) = x^2 - 4x + 7$.

¿Para qué valor o valores de x se verifica que $g(x)=7$? ¿Para cuáles $g(x)=2$?

6.- Para las siguiente funciones dadas por tablas, decidir cuáles son funciones y cuáles no. Explicar en cada caso.

x	$f(x)$
1	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	2
0	0
1	-1
4	-2
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

x	$g(x)$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1
-1	1
-2	-1
2	-1
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

x	$h(x)$
1	2
$\frac{1}{4}$	2
3	2
0	2
1	2
3	2
$\frac{1}{4}$	2

x	$s(x)$
0	1
2	3
4	2
0	0
1	-1
4	-2
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

6.3 FUNCIONES LINEALES

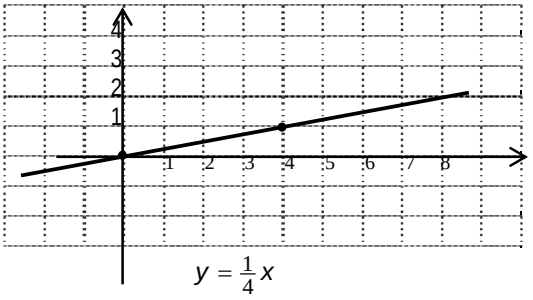
Entre los tipos de funciones posibles hay uno especialmente importante, el de las funciones cuya gráfica es una recta o parte de ella. Los fenómenos que describen se caracterizan porque la variación de la variable dependiente es proporcional a la variación de la variable independiente.

Una función lineal se expresa de la forma, $f(x) = mx + b$ con m y b números reales.
El dominio de una función lineal es el conjunto de los números reales.

Las ecuaciones $y = mx$ representan rectas que pasan por el origen de coordenadas, se llaman **funciones de proporcionalidad**.

¿Cómo dibujar la función $y = \frac{1}{4}x$?
Sabemos que pasa por (0,0); basta obtener otro punto, se consigue dando un valor particular a x, tomemos x=4,
entonces $y = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$.

Es una recta que pasa por (0,0) y (4,1) como la del gráfico.



Recordar:
Bastan dos puntos para determinar una recta

La función de ecuación ***y= f(x)= x*** es de proporcionalidad y se denomina **función identidad**.

Ejemplo 1: Hay balanzas en las que se puede digitar el precio por kilo de la mercadería que se va a pesar. Al colocar la mercadería, la balanza indica el peso en gramos y el precio total.

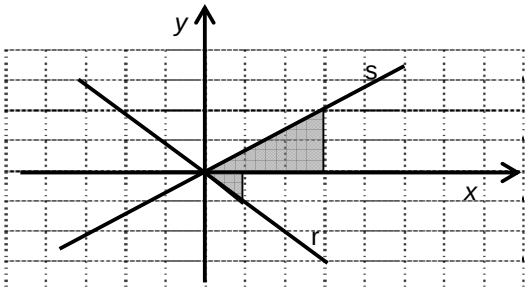
Por ejemplo, un tipo de pan cuesta por kilo $1.20. Si ponemos sobre la balanza 1500 gramos indicará el valor a pagar de $1.80.
Completar la tabla:

Peso (gramos)	0	1	100	450	500	600	1000		1500
Precio (pesos)		0.0012	0.12	0.54			1.20		1.80

Por cada gramo de aumento, el precio sube 0.0012 pesos. Observamos que el costo es proporcional al peso.
La ecuación que representa la situación es una recta que pasa por origen: $y = 0.0012\,x$.
El número que acompaña a x es la constante de proporcionalidad, para este caso es el precio por unidad de peso, o pendiente de la recta.
El dibujo de la recta queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 2: La inclinación de cada recta viene dada por su pendiente, ***m***, que es el aumento o disminución que experimenta la variable ***y*** cuando la variable ***x*** aumenta una unidad.

Dada la gráfica de la recta ***s***, se puede calcular la pendiente, observamos que pasa por (0,0) y por (3,2). Es decir cuando ***x*** avanza 3 unidades, ***y*** sube 2.



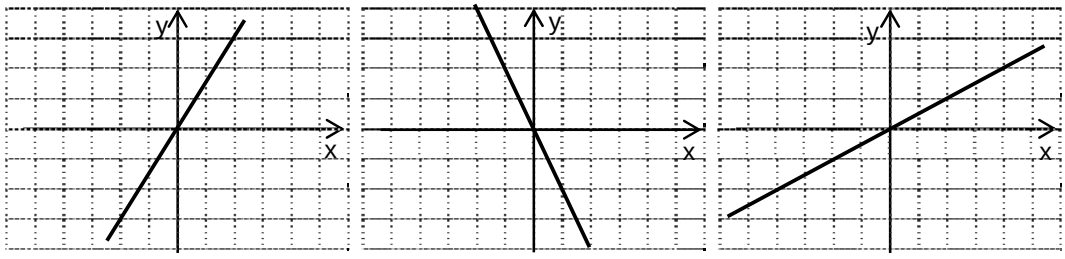
La pendiente de la recta ***s*** es $\frac{2}{3}$, su ecuación $y = \frac{2}{3}x$

La ecuación de la recta **r**, es $y = -x$ porque cuando x avanza 1, y baja 1, o sea $m = \frac{-1}{1}$

EJERCICIOS

1.- Representar en un sistema de ejes coordenados: a) $y = x$ (función identidad) b) $y = -3x$.

2.- Dar la ecuación de cada una de las rectas.



Recordar

La función de ecuación $f(x) = mx + b$ tiene las siguientes características:

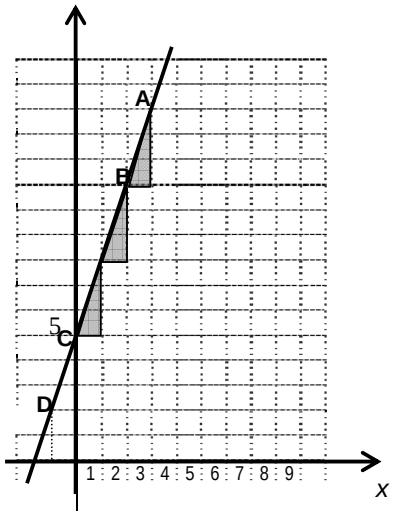
- es una función cuya representación gráfica es una **recta.**
- ***m*** (coeficiente de x) es la **pendiente**, expresa la variación de la variable y cuando x aumenta una unidad.
- ***b*** es **la ordenada al origen,** la recta corta el eje ***y*** en el punto (0,b).

6.3.1 Obtención de la pendiente conociendo dos puntos de la recta.

Un punto P(x_o,y_o) pertenece a la recta de ecuación $y = mx + b$, si y sólo si sus coordenadas la verifican: $y_0 = mx_0 + b$.
Por ejemplo P(2,-1) pertenece a la recta $y = 3x - 7$, se verifica la igualdad $-1 = 3 \cdot 2 - 7$. El punto Q(1,2) no pertenece a la recta, puesto que no verifica la ecuación: $3.1 - 7 = 4 \neq 2$.

Dados dos puntos que pertenecen a la recta podemos determinar la pendiente de la misma.

Por ejemplo, los puntos A(3,14) ; B(2,11); C(0,5) y D(-1,2) pertenecen a una recta (ver figura adjunta).



Calculamos para A(3,14) y B(2,11),

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11-14}{2-3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Para C(0,5) y D(-1,2),

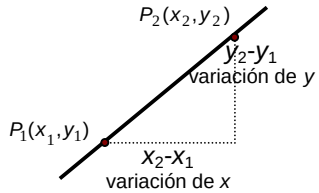
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-5}{-1-0} = \frac{-3}{-1} = 3 .$$

Para D(-1,2) y A(3,14).

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14-2}{3-(-1)} = \frac{12}{4} = 3$$

Observamos que en los tres casos $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 3$, este es el valor de la pendiente.

La ecuación de la recta es: $y = 3x + 5$.

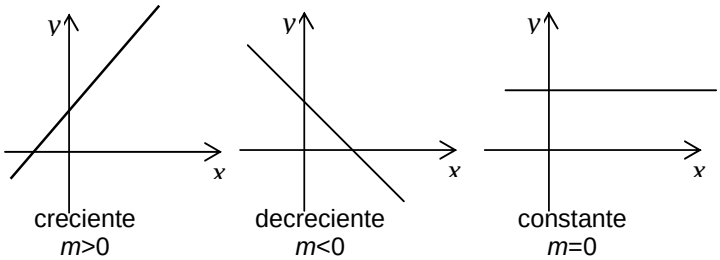


Dados dos puntos cualquiera pertenecientes a una recta, si calculamos la diferencia de las ordenadas de los puntos (variación de y), sobre la diferencia de las abscisas (variación de x) obtenemos la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

6.3.2 Signo de la pendiente

Si *m*>0, la recta, de izquierda a derecha sube, es creciente.
Si *m*<0, la recta, de izquierda a derecha baja, es decreciente.
Si *m*=0, la recta es horizontal, los valores de y permanecen constantes.
Para el caso *m*=0 , la ecuación es *y*= constante, recta horizontal

Por ejemplo la recta que pasa por los puntos (1,4) y (-2,4) tiene ecuación *y*=4.
En particular la ecuación *y*=0 corresponde al eje ***x*** .

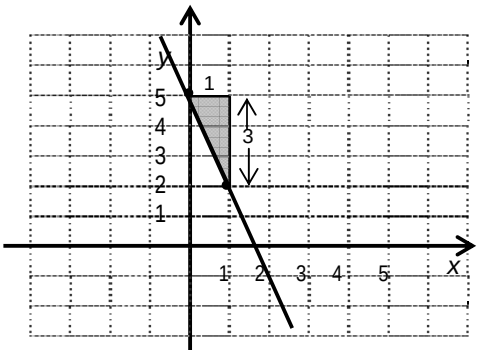


6.3.3 Gráficas de rectas usando *m* y *b*

Por ejemplo, para graficar la recta $y = -3x + 5$
Marcar el valor de *b* (ordenada al origen) sobre el eje *y*, es decir el punto (0,5).

A partir de ese punto, como la pendiente es $-3 = \frac{-3}{1}$,

se toma una unidad a la derecha y 3 unidades hacia abajo, así se obtiene el punto (1,2). Uniendo ambos puntos obtenemos la gráfica deseada.



EJERCICIO

Representar las rectas de ecuaciones:

$a) y = 2x - 3$ $b) y = -\frac{2}{3}x$ $c) y = 5$

6.4 ECUACIÓN DE LA RECTA SI SE CONOCE UN PUNTO Y LA PENDIENTE

Si conocemos de una recta que pasa por un punto (x_0, y_0) y tiene pendiente *m,* podemos obtener otra expresión para su ecuación.

Como el punto (x_0, y_0) pertenece a la recta verifica su ecuación $y = mx + b$, es decir $y_0 = mx_0 + b$, despejando se obtiene $b = y_0 - mx_0$, reemplazando en la ecuación general queda $y = mx + (y_0 - mx_0)$ de donde $y = m(x - x_0) + y_0$ o la expresión equivalente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE:
$y - y_0 = m(x - x_0)$

Ejemplo 1: Dar la ecuación de la recta que pasa por (3,4) y tiene pendiente m=5.

Solución
Usamos la forma PUNTO-PENDIENTE $y - 4 = 5(x - 3)$ de donde $y = 5x - 11$.

Ejemplo 2: Dar la ecuación de la recta que pasa por (-3, -1) y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

Solución

$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - (-3))$ de donde $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

6.5 ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Para determinar la ecuación de una recta si conocemos dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que pertenecen a ella, calculamos la pendiente

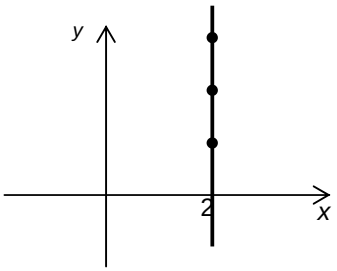
$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ siempre que $x_1 \neq x_0$.

y usando la ecuación PUNTO-PENDIENTE obtenemos:

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS:
$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ si $x_0 \neq x_1$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \text{si } x_1 \neq x_0$$

Observación: Si $x_0 = x_1$, la recta que une los puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1) está en posición vertical.



Las rectas verticales ***no representan funciones***, su ecuación es del tipo x = constante.

Por ejemplo, la ecuación de la recta que pasa por (2,1) y (2,3) es x=2.

En particular la ecuación x = 0 corresponde al eje ***y***.

Ejemplo 1: Obtener la ecuación de la recta que pasa por P(6,1) y Q(-2,7).

Solución

Usamos $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ si $x_0 \neq y_0$

$m = \frac{7-1}{-2-6} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$ Luego la ecuación es : $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 6)$

Ejemplo 2: a) Encontrar la fórmula para calcular la cantidad de agua que queda cada día, en una represa que pierde agua de manera uniforme, si la cantidad inicial es de 1150 millones de litros y los datos diarios son:

Día	1	2	3
Millones de litros de agua	1130	1110	1090

b) ¿Si continúa la pérdida de 20 millones de litros por día, en cuánto tiempo se quedará vacía la represa?
c) ¿Cuándo tendrá 150 millones de litros?

Solución
a) Conocemos los puntos (1, 1130) y (2, 1110). Como la pérdida es uniforme una función lineal describe la situación.

x mide el tiempo en días; y los litros de agua, en millones.
La ecuación es:

$$y - 1130 = \frac{1.110 - 1130}{2 - 1}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -20x + 20 + 1130 \quad \Rightarrow \quad y = -20x + 1150$$

C(x) expresa la cantidad de agua de la represa en x días.

La fórmula buscada es: $y = C(x) = -20x + 1150$

b) Quedará vacía cuando la cantidad de agua sea cero. Es decir C(x)=0.
Resolviendo la ecuación:

$$0 = -20x + 1150 \quad \Rightarrow \quad 20x = 1150 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1150}{20} = 57.5$$

Quedará vacía a los 57 días y medio.

c) Para responder debemos resolver la ecuación: C(x)=150.

$$150 = -20x + 1150 \quad \Rightarrow \quad 20x = 1150 - 150 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1000}{20} = 50$$

La represa tendrá 150 millones de litros de agua cuando pasen 50 días.

Ejemplo 3: Obtener la ecuación de la recta que corta al eje x en "a" y al eje y en "b".

Solución

Se desea encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b) con $a\neq 0$; $b\neq 0$. Usamos la ecuación general de la recta que pasa por dos puntos.

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a) \text{ de donde } y=-\frac{b}{a}(x-a) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x+b$$

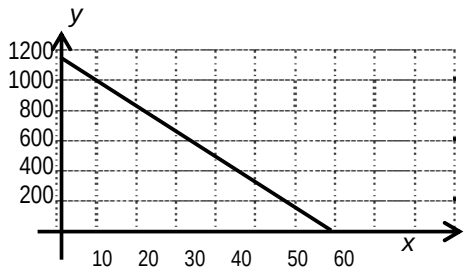
operando : $ay=-bx+ab \quad \Rightarrow \quad bx+ay=ab$ $(ab\neq 0)$, dividiendo por ab se obtiene : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

En algunos casos es útil esta forma de la ecuación de la recta.

Usando esta forma de expresión, la ecuación que corresponde al problema de la represa es:

$\frac{x}{57.5}+\frac{y}{1150}=1$ de esta forma trazar su

gráfica es inmediato, ya que basta marcar los puntos de corte con los ejes x = 57.5 e y = 1150 y luego unir con una recta.

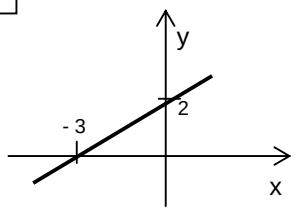


ECUACIÓN DE LA RECTA QUE CORTA AL EJE x EN $x=a$ Y AL EJE y en $y=b$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

llamada forma **segmentaria** de la recta

Ejemplo 4: Graficar $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$.



Solución

Es sencillo, ya que conocemos que corta al eje ***x*** en x = -3 y al eje ***y*** en y = 2.

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ equivale a $y=\frac{2}{3}x+2$

Ejemplo 5:

Dada la recta de ecuación: $2x-3y=1$ dar su representación gráfica.

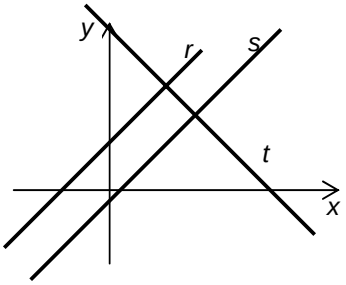
Solución

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación se transforma en: $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$

luego la recta corta al eje x en $\frac{1}{2}$ y al eje y en $-\frac{1}{3}$. por lo cual la representación gráfica se obtiene de inmediato, se deja al lector el trazado.

6.6 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

En la figura observamos que las rectas *r* y *s* tienen la misma inclinación, no se cortan, es decir son paralelas.
r y *t* forman al cortarse un ángulo recto, es decir son perpendiculares. Lo mismo *s* y *t*.



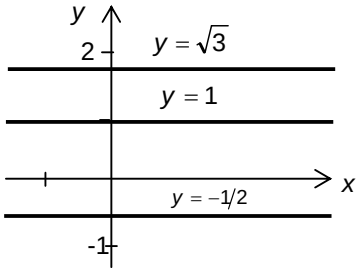
En general, si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, y recíprocamente, si dos rectas tienen igual pendiente son paralelas.

Dos rectas son perpendiculares si y sólo sí el producto de sus pendientes es -1, o dicho de otra forma la pendiente de una, es la reciproca cambiada de signo de la otra.

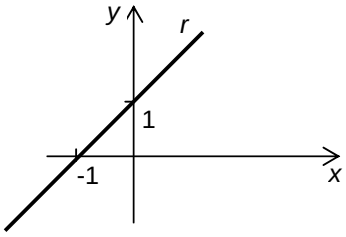
Dos rectas : $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$	son paralelas $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$ son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 = -1$, o sea $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Ejemplo 1: Las siguientes ecuaciones $y = 2x + 3$ y $y = 2x - \dfrac{5}{2}$ corresponden a rectas paralelas. Ambas tienen pendiente *m* = 2. Como ejercicio, graficar ambas en un mismo sistema cartesiano.

Ejemplos 2: La pendiente de cualquier recta horizontal es cero. Observar las rectas $y = 1$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $y = \sqrt{3}$ de la figura.



Ejemplo 3: Dada la recta *r* que se muestra en la figura, determinar la ecuación de la recta:



a) paralela a *r* y pase por (2,-3)
b) paralela a *r* y tenga ordenada al origen $\sqrt{2}$
c) perpendicular a *r* y corte al eje x en $x_0 = \dfrac{7}{2}$

Solución

a) La pendiente *m* de la recta ***r*** de la figura es 1.
La ecuación pedida es $y - (-3) = 1(x - 2)$ llevada a la forma $y = m x + b$, queda $y = x - 5$.

b) m =1 ; $b = \sqrt{2}$ la ecuación es $y = x + \sqrt{2}$.

c) La pendiente de la recta buscada es -1 y pasa por $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$.

La ecuación es: $y = -1\left(x - \dfrac{7}{2}\right) = -x + \dfrac{7}{2}$

Se deja como ejercicio para el lector dibujar en un mismo sistema de ejes las rectas obtenidas en a) b) y c).

Ejemplo 4: Seleccionar entre las siguientes ecuaciones, las que representan rectas perpendiculares.

$y = 3x - 5;$ $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{4};$ $y = -3x + 5;$ $\frac{y}{3} + x = 1;$ $y + 5x = 0.$

Solución

La segunda y última ecuación verifican que el producto de sus pendientes es -1.

$\frac{1}{5} \cdot (-5) = -1,$ por lo tanto son rectas perpendiculares.

Como ejercicio, calcular las pendientes de las otras rectas y comprobar si hay paralelas.

6.7 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Todas las formas de ecuaciones de rectas que hemos visto pueden ponerse como una expresión del tipo: $ax + by + c = 0,$ *con* $a,b,c \in R$, se llama **forma general** de la ecuación de la recta.

Observación:

- Ésta es la expresión de una ecuación lineal con dos incógnitas (se estudió en el capítulo 2) y la representación gráfica es una recta.
- Se tiene una función lineal siempre que sea $b \neq 0$.
- Para los casos $a \neq 0$ y $b = 0$, serán rectas paralelas al eje *y*, y no corresponde a la gráfica de una función.

Ejemplo: Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta $5x - 7y + 11 = 0$

Despejando y obtenemos: $y = \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$ por lo tanto $\begin{cases} pendiente = \frac{5}{7} \\ \text{ordenada al origen} = \frac{11}{7} \end{cases}$

Para representarla, se pueden utilizar los datos de la pendiente y la ordenada al origen o dando valores encontrar las coordenadas de puntos que satisfagan la ecuación.

Si hacemos $x = 2 \Rightarrow 5 \cdot 2 - 7y + 11 = 0 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3$ el punto $(2,3)$ pertenece a la recta

Para $x = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 7y + 11 = 0 \Rightarrow y = \frac{11}{7}$ el punto $(0, \frac{11}{7})$ pertenece a la recta

Marcando y luego uniendo con una recta los puntos de coordenadas (2,3) y $\left(0, \frac{11}{7}\right)$ obtendremos la representación de gráfica de la ecuación $5x - 7y + 11 = 0$.

6.8 INTERSECCIÓN DE RECTAS

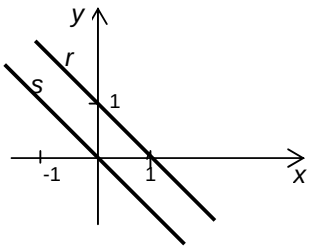
El problema geométrico de determinar el punto de intersección de dos rectas es equivalente al problema algebraico de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Dadas dos rectas en forma general $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ el punto intersección o de corte $P(x,y)$ se encuentra sobre ambas rectas y es la solución del sistema de ecuaciones.

Se pueden presentar los siguientes casos:

- Que las rectas no tengan **ningún punto en común** (rectas paralelas no coincidentes).

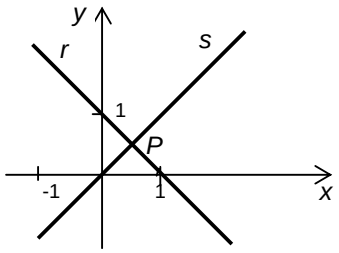
Ejemplo: $\begin{cases} (r)\ x+y=1 \\ (s)\ x+y=0 \end{cases}$



El sistema como vimos en el capítulo 2 es **incompatible o inconsistente**, no tiene solución.

- Que las rectas tengan **un punto en común** (rectas que se cortan en un único punto).

Ejemplo: $\begin{cases} (r)\ x+y=1 \\ (s)\ x-y=0 \end{cases}$

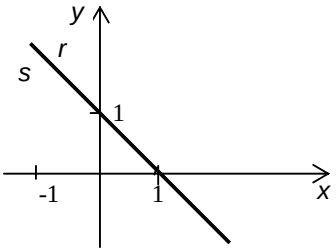


el punto $P(x,y)$ es la intersección de las rectas, en este ejemplo $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Resolviendo el sistema $x = 1/2$ e $y = 1/2$.
El sistema es **compatible determinado**, tiene solución única.

- Que las rectas tengan **infinitos puntos en común** (rectas coincidentes).

Ejemplo: $\begin{cases} (r)\ x+y=1 \\ (s)\ 3x+3y=3 \end{cases}$



Si graficamos las rectas *r* y *s*, se puede comprobar que son coincidentes; por lo tanto la intersección es el conjunto infinito de puntos que pertenecen a cualquiera de ellas.
El sistema es **compatible indeterminado.**

*Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y, despejar la variable **y** de ambas ecuaciones y graficar las rectas. La solución es el punto intersección de las rectas en el gráfico.*

Ejemplo: Ana y Luis son hermanos quieren llegar juntos a casa de su madre para darle un obsequio.
Ana vive a 32 *km*. de la casa de la madre y se dirige hacia allí en automóvil, a una velocidad constante de 60 *km/h*. Luis vive en la misma ruta, pero a 10 *km* más cerca de la casa de su mamá. Va en moto a una velocidad constante de 40 *km/h*.
Combinan el encuentro por teléfono y ambos hermanos salen simultáneamente de sus domicilios.
¿Al cabo de cuánto tiempo se produjo el encuentro?
¿El encuentro se produjo exactamente al llegar a la casa de la madre?

***Solución** gráfica*:

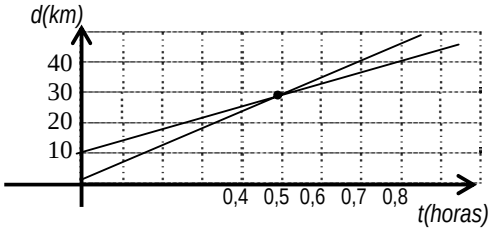
Damos nombre a las variables:
t: tiempo que tardan Ana y Luis en encontrarse.
d: distancia recorrida por Ana en el tiempo *t*.
d –10: distancia recorrida por Luis en el tiempo *t*.

Planteando las ecuaciones obtenemos $\begin{cases} d = 60 \cdot t \\ d - 10 = 40 \cdot t \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} d = 60\,t \\ d = 40\,t + 10 \end{cases}$

Cada ecuación es una función lineal de variable independiente *t*.
Para obtener la representación gráfica, calculamos algunos valores para Ana y Luis y los anotamos en una tabla.

Ana	*t* (horas)	0	0.4	0.5	0.6	0.7
	d (*km*)	0	24	30	36	42

Luis	*t* (horas)	0	0.4	0.5	0.6	0.7
	d (*km*)	10	26	30	34	38



El punto común de ambas funciones es (0.5,30), punto intersección de las rectas y encuentro de los hermanos.

En el gráfico vemos que el encuentro entre los hermanos se produce a la media hora, a una distancia d=30 *km*.

Faltaban 2 *km* para llegar a la casa de la madre.

***Solución** analítica del sistema*

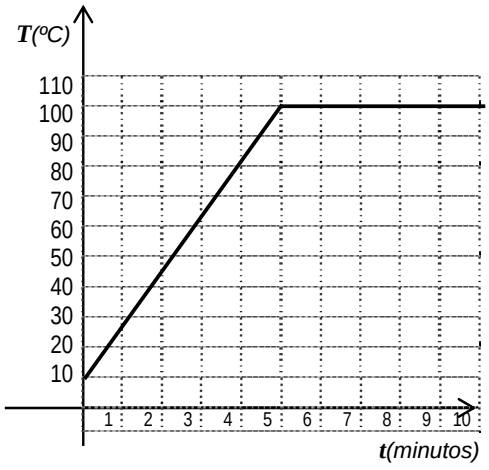
$60\,t = 40\,t + 10 \quad \Rightarrow \quad 60\,t - 40\,t = 10 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2} = 0.5\,horas$

de la primera ecuación: $d = 60 \cdot 0.5 = 30 km$

Se encuentran a los 30 minutos y no en la casa de la madre

6.9 FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS

Ejemplo: 1: Se pone a calentar un recipiente con agua. La temperatura del agua varía según el tiempo transcurrido de acuerdo a los datos del gráfico.
a) ¿Cómo encontrar una fórmula para la función representada?
b) Calcular e interpretar *T*(3), *T*(5) y *T*(9).



Solución

a) Observamos que el gráfico se compone de dos segmentos de recta, uno para los valores comprendidos entre 0 y 5 y otro para los valores de t mayores que 5.
La porción del gráfico que corresponde a $0 \le t \le 5$ es un trozo de la recta que pasa por los puntos (0,10) y (5,100); para $t > 5$ es una parte de una recta horizontal de ecuación $T = 100$.

Determinamos la ecuación de la recta $T = mt + b$ que pasa por los puntos (0,10) y (5,100),

$b = 10;\quad m = \dfrac{100-10}{5-0} = 18$ Resulta $T(t) = 18\,t + 10$ para $0 \le t \le 5$

La fórmula de la función $T(t)$ que mide la temperatura del agua en función del tiempo t está compuesta por dos partes lineales y se expresa así:

$$T(t) = \begin{cases} 18\,t + 10 & \text{si} \quad 0 \le t \le 5 \\ 100 & \text{si} \quad t > 5 \end{cases}$$

b) Para calcular $T(3)$ se utiliza $T(t) = 18\,t + 10$ porque $3 < 5 \;\Rightarrow\; T(3) = 18.3 + 10 = 64$

Significa que a los 3 minutos el agua está a una temperatura de 64ºC.

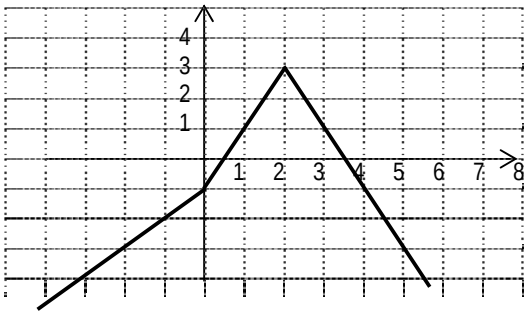
Para calcular $T(5)$ se utiliza $T(t) = 18\,t + 10$ porque $0 < 5 \le 5 \;\Rightarrow\; T(5) = 18.5 + 10 = 100$

Para obtener $T(9)$ se utiliza $T(t) = 100$ porque $9 > 5 \;\Rightarrow\; T(9) = 100$

Queda para el lector interpretar $T(5)$ y $T(9)$.

Ejemplo 2: Representar la función: $y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x < 0 \\ 2x - 1 & si\ 0 \le x < 2 \\ -2x + 7 & si\ x \ge 2 \end{cases}$

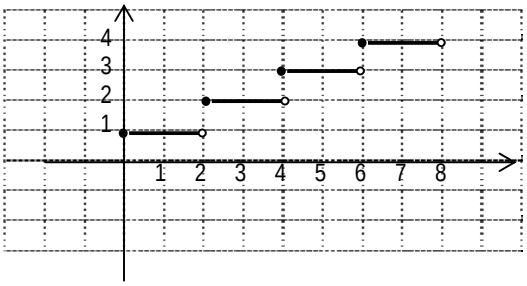
Solución



Observar que en cada intervalo, la función se define por un segmento de recta.
Para describir estas gráficas es fundamental tener en cuenta el intervalo que corresponde a cada expresión.

Ejemplo 3: a) Dar la fórmula de la función $g(x)$ representada en el gráfico.

b) Calcular $g(4)$ y $g(3.99)$.



Funciones formadas por trozos constantes se llaman ***escalonadas.***

Solución

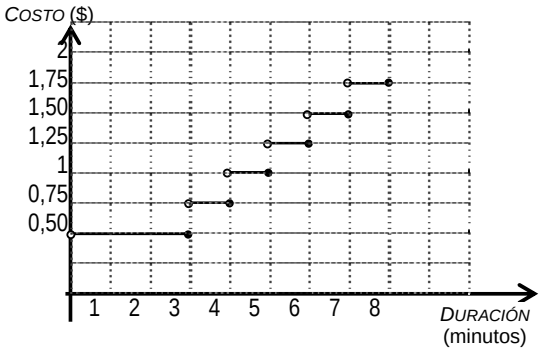
a)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ 2 & si \quad 2 \le x < 4 \\ 3 & si \quad 4 \le x < 6 \\ 4 & si \quad 6 \le x < 8 \end{cases}$$

b) Por la parte a) tenemos: $g(4) = 3$; $g(3.99) = 2$.
Observamos que en $x = 2$, $x = 4$ y en $x = 6$ se produce un salto. La función en cada uno de esos puntos está perfectamente determinada por un único valor, indicado en el gráfico por un punto relleno.

Ejemplo 4: Una compañía de teléfonos para hacer una llamada de San Luis a Villa Mercedes cobra 50 centavos ($ 0.50) para iniciar la comunicación, y se puede hablar hasta 3 minutos. A partir de ese momento, cada minuto cuesta 25 centavos ($0.25).
Graficar la función que relaciona la variable *duración de la llamada* con *costo* de la misma.
Se hace una llamada a V.Mercedes de 7 minutos y 20 segundos ¿cuánto se paga?.

Solución



Se paga $1.75.
Tener en cuenta que una comunicación de 8 minutos cuesta lo mismo**.**

Observación: *En los extremos de cada segmento de la gráfica, el círculo blanco indica que el punto no pertenece a la gráfica y el círculo negro que pertenece*.

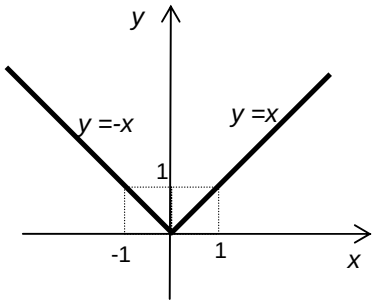
Los saltos que presenta la gráfica se llaman ***discontinuidades*** *de la función.*

Ejemplo 5: Representar la función definida por $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Solución

Esta función se llama función **valor absoluto** de x y se la denota $y = |x|$

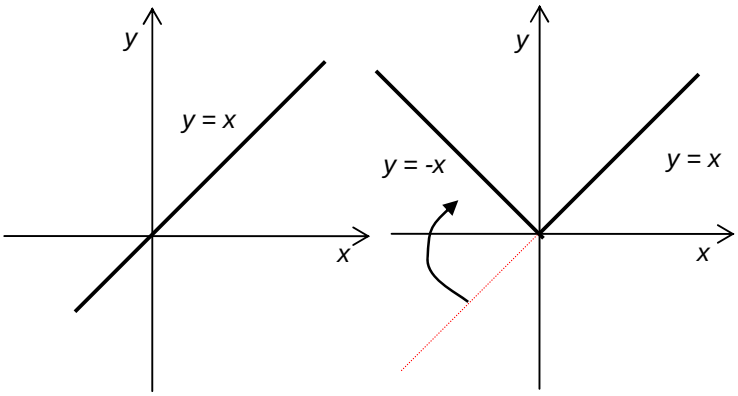
De la definición vemos que si x es negativa se le cambia de signo para hacerla positiva, si x es positiva se deja su valor.



6.10 FUNCION VALOR ABSOLUTO

Dada $y = f(x)$, una función, podemos considerar $y = |f(x)|$ ***el valor absoluto*** de la función *f,* ésta es una función que asigna valores no negativos, por lo que, si los valores de *f(x)* son negativos, basta con multiplicarlo por –1. (Recordar la definición de valor absoluto de un número real dada en el capítulo 1.
Este hecho, en el gráfico de $y = |f(x)|$ se traduce en una reflexión de las imágenes negativas de *f(x),* respecto del eje ***x*** , quedando fijas las imágenes positivas.

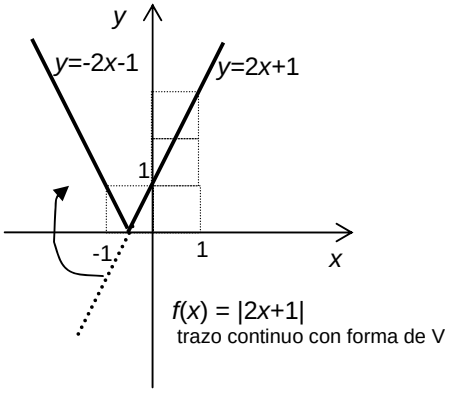
Así, por ejemplo, la gráfica de $y = |x|$ se obtiene a partir de la gráfica de la función identidad $y = x$, de la siguiente forma:



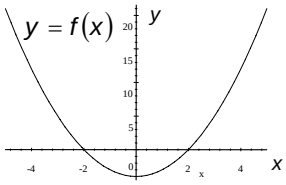
Ejemplos 1: Representar $y = |2x + 1|$.

Solución

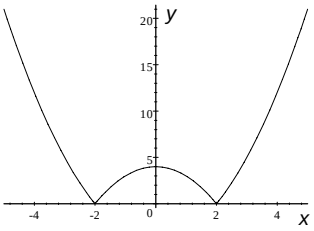
La recta $y = 2x+1$ pasa de negativa a positiva cuando $x = -\frac{1}{2}$. La parte de la recta que queda por debajo del eje x, debe quedar por encima cuando se hace el gráfico del valor absoluto.



Ejemplos 2: Dada la gráfica de $f(x)$. Hacer la gráfica de $y = |f(x)|$



Solución



La parte negativa de la gráfica debe pasar a positiva, en este caso $y = f(x)$ es negativa en el intervalo (-2,2).

Por lo cual un gráfico aproximado de $y = |f(x)|$ es el adjunto.

6.11 FUNCIONES CUADRATICAS

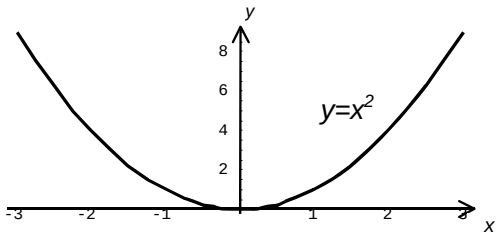
Este tipo de funciones aparece con mucha frecuencia en aplicaciones de la matemática. Por ejemplo, una función que proporciona la altura ***s*** de un objeto que cae en función del tiempo ***t*** se llama función de posición. Si no se considera la resistencia del aire, la posición de un objeto que cae admite el modelo cuadrático:

$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ donde g denota la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y s_0 la altura inicial. (En la Tierra la constante g vale aproximadamente -9,8m/s^2)

Una función cuya expresión es: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, con a, b y c números reales, se llama **función cuadrática**.

Estas funciones están definidas para todo número real, es decir su dominio es **R**.
La representación gráfica es una curva llamada **parábola**, los puntos del plano que verifican la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ constituyen la gráfica.
Para familiarizarnos con las gráficas de las funciones cuadráticas, las principales características y propiedades, consideraremos:

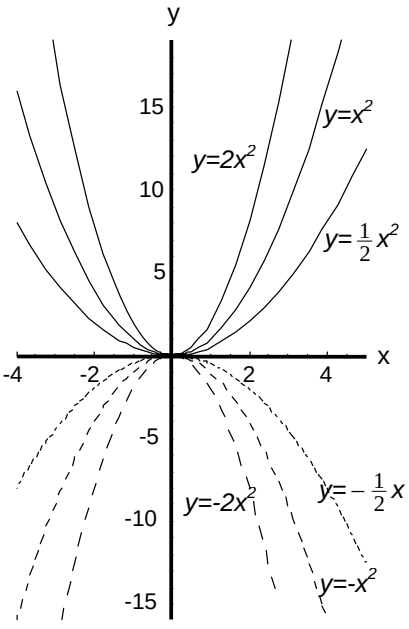
Caso 1: En $y = ax^2 + bx + c$, tomamos a =1, b = 0 y c = 0, se obtiene la ecuación $y = x^2$.
Veamos algunos valores particulares en la tabla siguiente:



x	$y=x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
-1/2	1/4
0	0
1/2	1/4
1	1
2	4
3	9

El gráfico es una curva continua. La variable *x* puede tomar cualquier valor real, por lo tanto el dominio de esta función es **R**. Como el cuadrado de un número es siempre positivo o cero, el conjunto imagen son los números reales mayores o iguales que cero.

Caso 2: Graficas de parábolas de ecuación $y = ax^2$.
Tomando los casos particulares a = 1; a = 2 ; a = 1/2 ; a = -1; a = -2 y a = -1/2, obtenemos la familia de parábolas del dibujo.



Solución

Notar que si $a > 0$, las parábolas se abren hacia arriba, y tienen un mínimo en $x = 0$.

Si $a < 0$, las parábolas se abren hacia abajo, en este caso las curvas tienen un máximo en $x = 0$.

Todas son **simétricas con respecto al eje *y***. Esto significa que si el punto (x_1, y_1) está sobre una curva, también lo está el punto de coordenadas $(-x_1, y_1)$.

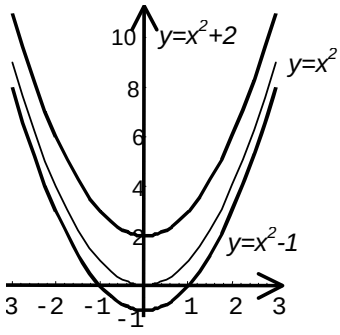
Por ejemplo para la curva $y = 2x^2$ los puntos (1, 2) y (-1, 2) pertenecen a ella.

El único punto que pertenece al eje de simetría y también a la parábola se llama **vértice**.

Todas las parábolas del dibujo tienen vértice $V(0, 0)$.

Caso 3: En la ecuación general $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ y $b = 0$, obtenemos $y = ax^2 + c$, $a \neq 0$.

Solución



Por ejemplo si $a = 1$ y $c = 2$ obtenemos $y = x^2 + 2$.
El gráfico de $y = x^2 + 2$, es el mismo que el de $y = x^2$ desplazado 2 unidades hacia arriba.
Si $a = 1$ y $c = -1$ queda $y = x^2 - 1$, su gráfico es el mismo que el de $y = x^2$ desplazado 1 unidad hacia abajo.
En general, a partir del gráfico de $y = ax^2$ se puede trazar la parábola $y = x^2 + c$, trasladando c unidades hacia arriba la curva $y = ax^2$, si c es positivo. Y c unidades hacia abajo, si c es negativo.

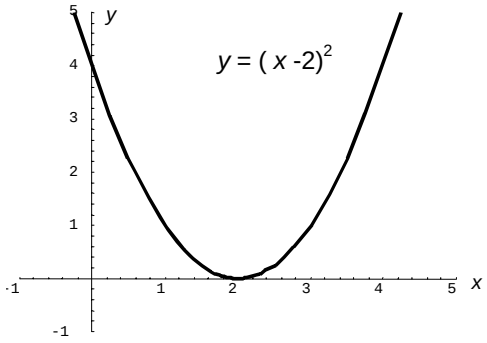
El vértice es $V(0, c)$, y el eje de simetría es $x = 0$.
Para $y = x^2 + 2$, el vértice es $V(0, 2)$, el dominio es **R** y la imagen el conjunto de los números reales mayores o iguales que 2.
Para $y = x^2 - 1$, el vértice es $V(0, -1)$, el dominio es **R** y la imagen el conjunto de los números reales mayores o iguales que -1.

Comparamos en una tabla algunos valores las funciones $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 1$ con los de la función $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y=x^2+2$	11	6	3	2	3	6	11
$y=x^2-1$	8	3	0	-1	0	3	8

Caso 4: La función: $y = (x - 2)^2$, es otra variación de $y = x^2$.

Solución
Observamos que su gráfico se obtiene trasladando 2 unidades a la derecha el gráfico de $y = x^2$, es decir por ejemplo los puntos $(-1,1)$; $(0,0)$; $(1,1)$ que satisfacen $y = x^2$ se convierten en los puntos $(1,1)$; $(2,0)$; $(3,1)$ que satisfacen $y = (x - 2)^2$. El vértice de la nueva curva se ubica en (2, 0).

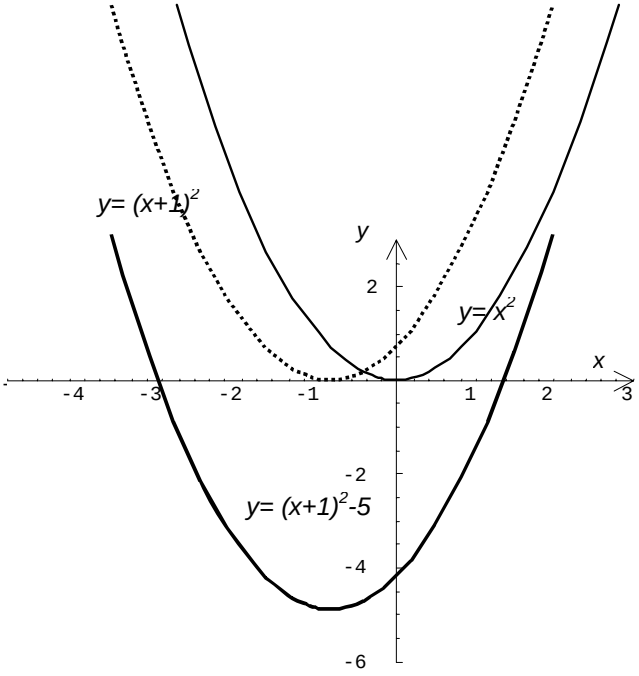


La gráfica de $y = (x - h)^2$ se obtiene de la de $y = x^2$ trasladándola $|h|$ en dirección del eje x.

Si h > 0, se traslada a la izquierda.
Si h < 0, se traslada a la derecha.

Notar que $(x - 2)^2$ es equivalente al polinomio de segundo grado $x^2 - 4x + 4$.

Caso 5: Dadas las coordenadas del vértice *V*(-1, -5) y sabiendo que la parábola debe tener la misma forma que $y = x^2$ veamos cómo trazar la gráfica de la nueva parábola.



Solución

En primer lugar trasladamos $y = x^2$ una unidad a la izquierda, es decir llevamos el vértice al punto (-1, 0).
Corresponde a la parábola de ecuación
$y = (x - (-1))^2 = (x + 1)^2$

Luego, $y = (x+1)^2$ la trasladamos 5 unidades hacia abajo

La ecuación será $y = (x+1)^2 - 5$
El vértice se ubica en el punto (-1,-5) y el eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = -1$.

Ceros *de una función y = f(x) son las abscisas de los puntos intersección de la función con el eje x. Haciendo y = 0 se obtienen los ceros o raíces de la ecuación.*

Determinamos los ceros de la función cuadrática $y = f(x) = (x+1)^2 - 5$

$0 = (x+1)^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{5} = |x+1|$ de donde

$\sqrt{5} = x + 1$ ó $-\sqrt{5} = x + 1$ por lo tanto los ceros son $x_1 = \sqrt{5} - 1$ y $x_2 = -\sqrt{5} - 1$

x_1 y x_2 son los puntos de corte de la parábola con el eje x. Puede verificarlos en el gráfico.
Calculando *f(0),* se determina el punto de corte de la parábola con el eje y.

$f(0) = (0+1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4$.

Es decir la gráfica pasa por (0,-4), también se puede determinar el simétrico de este punto que es (-2,-4).

Conocer los puntos de corte de la función con los ejes ayuda a construir la gráfica.

Caso 6: Parábolas de ecuación**:** $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$

Resumen

Si la función cuadrática viene expresada en la forma
$y = f(x) = a(x-h)^2 + k$
las coordenadas del vértice son V(h, k).
El eje de simetría es $x = h$.
Si $a > 0$, *la parábola es cóncava hacia arriba, si* $a < 0$, *es cóncava hacia abajo.*

Ejercicio graficar $y = 2(x-2)^2 + 6$.

Tener en cuenta que será una parábola de la misma forma que $y = 2x^2$. Pero el vértice es: $V(2, 6)$ por lo tanto debe trasladar adecuadamente $y = 2x^2$.

¿Tiene puntos de corte con el eje x ? ¿Cuál es el punto de corte con el eje y ?

Caso 7: Representación de la función cuadrática dada por la fórmula completa

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Se puede utilizar el método de completar cuadrados y llevar la ecuación a una equivalente a $y = a(x-h)^2 + k$ y proceder como en el punto 6.-

Sin embargo este proceso requiere de varios cálculos por lo cual presentaremos uno más sencillo, basado en determinar **puntos notables de la gráfica de** $y = ax^2 + bx + c$.

- **Intersección con el eje y**

$f(0) = a0^2 + b0 + c = c$, es decir, (0, c) es el punto de corte de la parábola con el eje y.

- **Coordenadas del vértice**

Para determinarlas, buscamos los puntos en que la recta $y = c$ corta a la parábola, para lo cual resolvemos es siguiente sistema de ecuaciones:

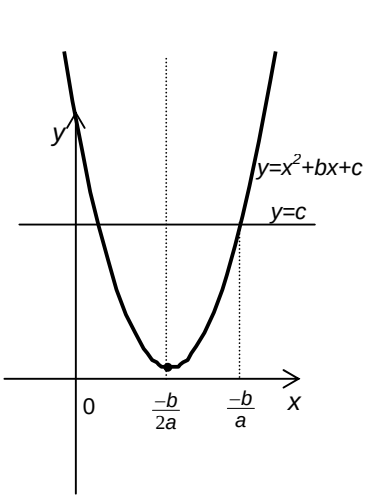
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases} \quad \text{soluciones : } 0 \text{ y } \frac{-b}{a}$$

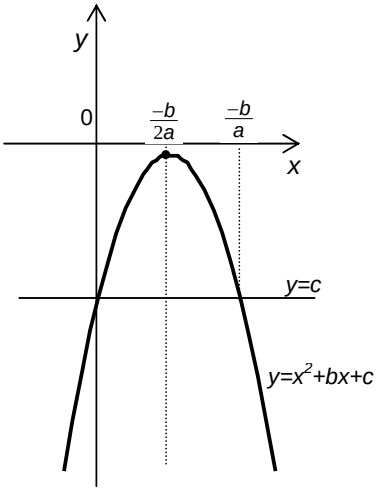
La recta $y = c$ corta a la parábola en puntos de abscisas $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$, la abscisa del vértice es el punto medio, tanto si la curva se abre hacia arriba, como hacia abajo es:

$$h = \frac{0 + (-\frac{b}{a})}{2} = -\frac{b}{2a} .$$

La ordenada del vértice se obtiene evaluando la función en $\frac{-b}{2a}$.

En conclusión las coordenadas del vértice $V(h, k)$ son $h = \frac{-b}{2a}$ $k = f(h)$

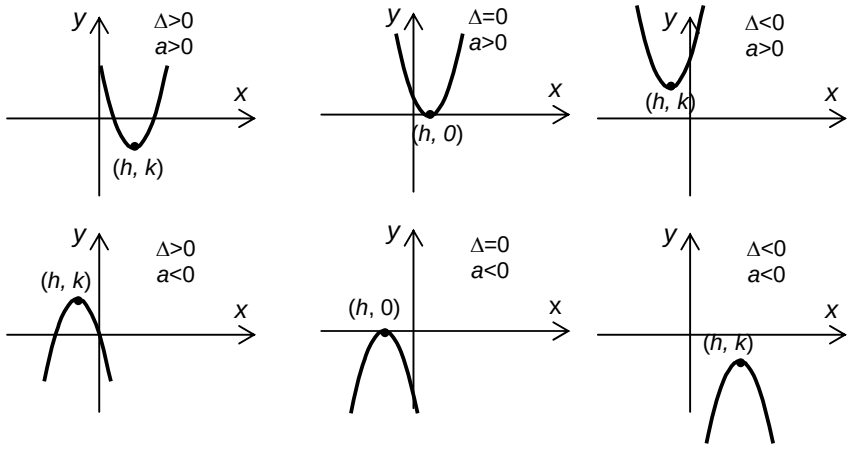




- **Intersección con el eje *x* .**

Hay que hacer $y = 0$ es decir determinar los ceros de la función o raíces de la ecuación de segundo grado $0 = ax^2 + bx + c$.
Hemos visto en el capítulo 2 cómo se resuelven estas ecuaciones, y que pueden tener dos soluciones distintas, una solución o ninguna, según sea el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, mayor, igual, o menor que cero.

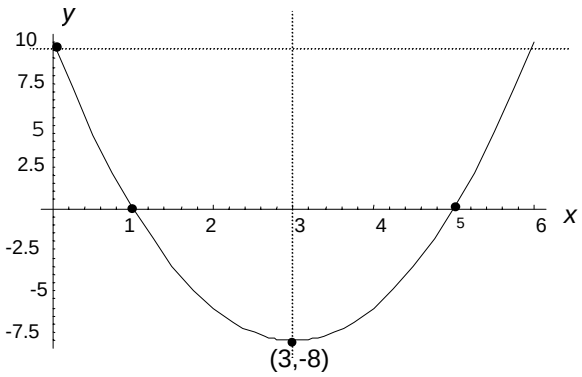
Si $\Delta > 0$ el gráfico corta al eje x en dos puntos, la función tiene dos ceros.
Si $\Delta = 0$ el gráfico toca al eje x en un único punto, es el vértice de la parábola.
Si $\Delta < 0$ el gráfico de la parábola no corta al eje x.



Ejemplo: Representemos $y = 2x^2 - 12x + 10$.
Corta al eje y en (0,10).
Coordenadas del vértice: $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2.2} = 3$; $k = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 10 = -8$.
Luego el vértice es: *V*(3, -8)

Para determinar los puntos de corte con eje x *r*esolvemos la ecuación
$0 = 2x^2 - 12x + 10$

Aplicamos la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado y se obtiene $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.



Caso 8: Forma factorizada de $y = ax^2 + bx + c$.
Si $\Delta > 0$, la fórmula de la función cuadrática se puede expresar en forma factorizada:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son los ceros o raíces de $y = ax^2 + bx + c$.

Expresar $y = 2x^2 - 12x + 10$, en forma factorizada. Vimos que sus raíces o ceros son $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Por lo tanto $y = f(x) = 2(x - 5)(x - 1)$

6.12 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1: Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ésta sube hasta cierto punto y luego empieza a caer. La relación entre el tiempo t (*en segundos*) que la piedra está en el aire y la altura s (*en metros*), se expresa por la fórmula: $s(t) = -5t^2 + 20t + 10$. ¿cuándo la piedra alcanza el punto más alto y cuál es esa altura?

Solución

Por lo visto anteriormente la fórmula corresponde a una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con ramas hacia abajo, por lo tanto determinar cuándo la piedra alcanza el punto más alto y cuál es esa altura, equivale a encontrar el vértice de la parábola.
Calculando el vértice se obtiene V(2,30), esto significa que a los 2 segundos de lanzada la piedra alcanza una altura de 30 metros (altura máxima por corresponder al vértice)-
La relación dada se puede expresar: $s(t) = -5(t-2)^2 + 30$.

Ejemplo 2: Un fabricante puede producir mesas para TV a un costo de $10 c/u. Los precios de venta indican que si las mesas se venden a x pesos cada una, se venderán cada mes aproximadamente 50 - *x*.

a) Expresar la función que describe el beneficio mensual del fabricante como función del precio de venta x.
b) Determinar cuál será el precio de venta que produce mayor beneficio.

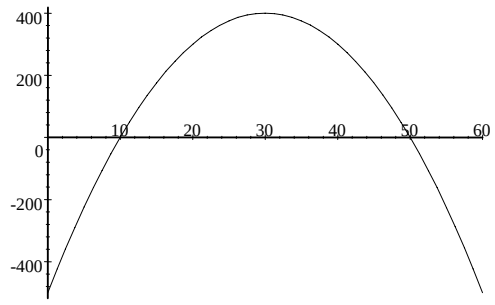
Solución

a) Beneficio mensual = (número de mesas vendidas).(beneficio por mesa).
Por lo tanto la fórmula para la función beneficio es: $B(x) = (50 - x)(x - 10)$.

b) Para responder esta pregunta basta determinar el máximo de la función *B(x)*.
Como es una parábola con ramas hacia abajo el máximo se alcanza en el vértice.

Haciendo las cálculos correspondientes se obtiene que el precio óptimo de venta es de 30 pesos por mesa.

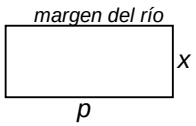
La gráfica aproximada de la función beneficio es la adjunta



Ejemplo 3: El propietario de un campo quiere plantar cierto tipo de lechuga en una parcela de forma rectangular de $500m^2$ y pegada a un río. Para evitar destrozos de las vacas decide que debe cerrarlo con alambre tejido. Dispone de 70 metros de alambre tejido, aprovechará que un lado del terreno da sobre el río y solamente pondrá alambrado en los otros lados.
¿Cuánto deben medir los lados del terreno?.

Solución

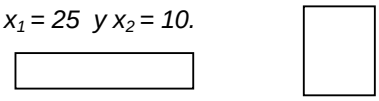
Llamamos *x* a la longitud de cada uno de los lados iguales del rectángulo y perpendiculares al río, y *p* al lado paralelo al río.



El propietario dispone de 70 metros de alambre tejido, por lo tanto el tercer lado, *p,* del rectángulo (lado paralelo al río) se expresa: $70 - 2x = p$
Area de la huerta = *largo x ancho* $= x(70 - 2x)$.

$$500 = x(70 - 2x) \text{ equivale a la ecuación : } x^2 - 35x + 250 = 0$$

Resolviendo la última ecuación se obtienen dos raíces*: $x_1 = 25$ y $x_2 = 10$.*
De donde el problema tiene dos soluciones:
x= 25 , p= 20. y x= 10 , p= 50.



EJERCICIOS:

1.- Trasladar adecuadamente la parábola $y = x^2$ para obtener las gráficas de las funciones *f* y *g*, definidas por: $f(x) = (x-3)^2$; $g(x) = (x+4)^2$.

Observación: *f(x) se obtiene desplazando* $y = x^2$ *,* 3 *unidades hacia la derecha en dirección del eje x . g(x) desplazando 4 unidades a la izquierda*.

2.- Dar coordenadas del vértice, eje de simetría y ecuación de la parábola que resulta de trasladar $y = -x^2$,

a) tres unidades a la derecha y cuatro hacia arriba.
b) una unidad a la izquierda y tres hacia abajo.

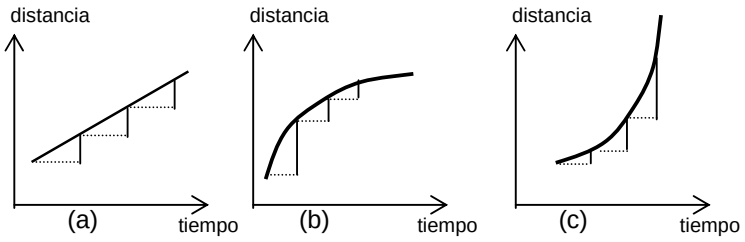
3.- Dar coordenadas del vértice, eje de simetría y graficar las siguientes funciones cuadráticas:

a) $y = 4x^2$ b) $y = 4(x+3)^2 - 6$ c) $y = -2(x-1)(x+4)$

6.13 PRACTICO: FUNCIONES

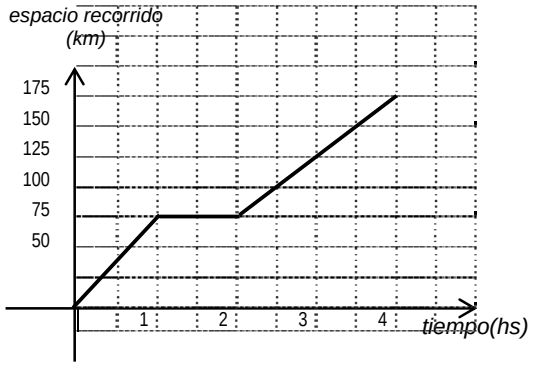
Ejercicio 1: Relacionar cada gráfica con el texto:

I. En tiempos iguales se recorren distancias iguales: velocidad constante.
II. En tiempos iguales, distancias cada vez mayores: el móvil acelera.
III. En tiempos iguales, distancias cada vez menores: el móvil frena.

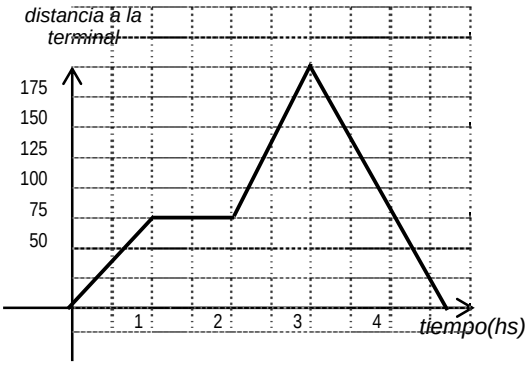


Ejercicio 2: La gráfica muestra los kilómetros recorridos por un colectivo, desde que sale de la terminal.

a) Tardó una hora en hacer los primeros 75 kilómetros. ¿Cuál fue su velocidad?.
b) El colectivo se detiene ¿Durante cuánto tiempo?.
c) Durante la última hora, ¿circula más rápido o más lento que durante la primera?.
d) ¿Cuántos kilómetros recorre en total? ¿En cuánto tiempo?
e) De la gráfica dada, ¿se puede obtener la información para contestar a qué distancia de la terminal se encuentra el colectivo?
f) ¿Podría está gráfica tener un tramo decreciente?.



Ejercicio 3: Un colectivo arranca y comienza a alejarse de la terminal. La gráfica muestra la distancia entre el colectivo y la terminal.



a) Describir el viaje durante las 3 primeras horas.
b) ¿Qué ocurre cuando t = 3 horas?
c) Cómo se interpreta el último tramo de la gráfica decreciente.
d) Porqué en el problema anterior no podía haber tramos decrecientes en la gráfica.
e) ¿Qué significado tiene el punto máximo y el punto mínimo de la gráfica?
f) ¿El colectivo está necesariamente detenido entre los tiempos t =1 y t =2?

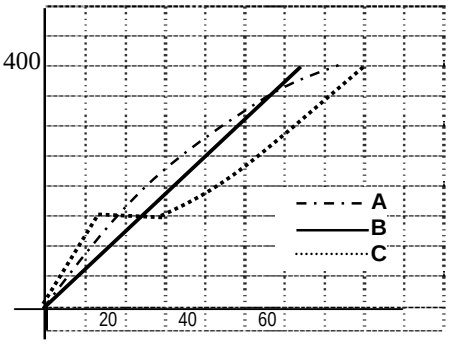
Ejercicio 4: En una playa de estacionamiento figura la siguiente tarifa de precios:

TARIFA
1ª. hora o fracción.....1$
Cada hora posterior o fracción.....0.50$
Período máximo 20 horas.

Representar la gráfica de la función:
tiempo de estacionamiento - costo.
¿Cuánto debe pagar si se deja el auto durante 8 horas?

Ejercicio 5: La gráfica describe aproximadamente lo que ocurre cuando tres atletas A,B y C participan de una carrera de 400 metros con vallas. Imaginando que es comentarista de la prueba, describa lo que sucede .

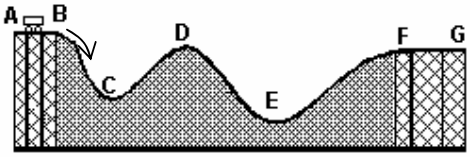
Las siguientes preguntas pueden ayudar para la descripción:
¿Cuándo C toma el primer lugar? ¿Cuándo se detiene C? ¿Cuándo B pasa a A?.
¿Cuándo A y B pasan a C? ¿Cuándo C empieza a correr nuevamente? ¿Cuál es el orden de llegada?

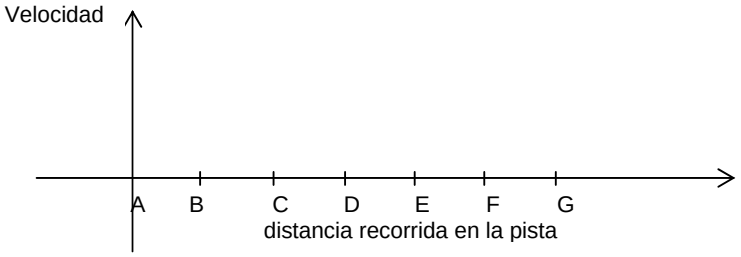


Ejercicio 6: El dibujo muestra el perfil de la pista de una montaña rusa, los carritos entre A y B se desplazan a una velocidad lenta y constante.

a) ¿Cómo variará la velocidad de estos carritos cuando van de A a G?

Dar la respuesta describiendo lo que ocurre y trazando una gráfica que muestre la variación de velocidad de los coches cuando van de A hasta G.



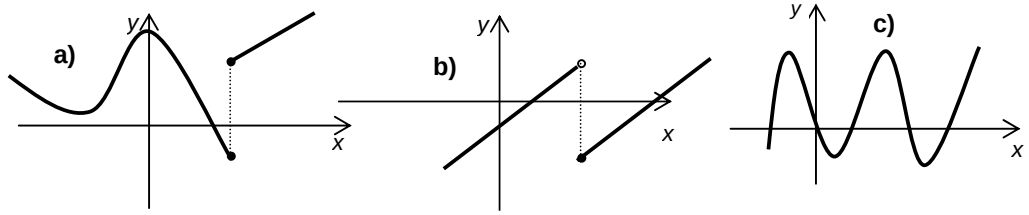


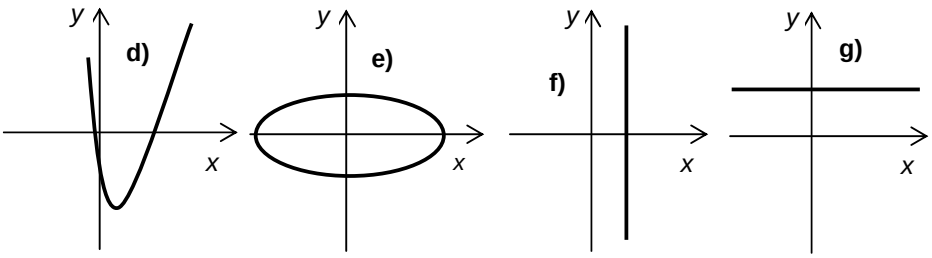
b) Responder a las siguientes preguntas usando solamente la gráfica que dibujó.
¿En que sectores de la pista el carrito viaja rápido? ¿En dónde va lento?
Controlar las respuestas mirando nuevamente el esquema de la pista de la montaña rusa.

c) Inventar otra pista de montaña rusa. En una hoja aparte dibujar una gráfica de la misma. Entregar a un compañero solamente la gráfica y pedirle que reconstruya la forma de la pista.

d) ¿Encuentra alguna relación entre la forma de una pista de montaña rusa y la forma de la gráfica que describe la velocidad de los carritos en función de la distancia?

Ejercicio 7: De las siguientes gráficas, indicar cuáles representan funciones y cuáles no. Justificar cada respuesta.





Ejercicio 8: Se estima que dentro de t años el número de habitantes que tendrá una ciudad será de $P(t) = 30 - \frac{6}{t+1}$ $t \geq 0$; t representa el número de años a partir del año 2004 y $P(t)$ el número de habitantes expresado en miles. (Observar que 2004 es el año cero)

- ¿Cuál será el número de habitantes de esa ciudad en el año 2005?
- Estimar el número de habitantes de esa ciudad en los años 2006, 2008 y 2010.
- ¿Qué le sucederá a la larga al tamaño de la población?

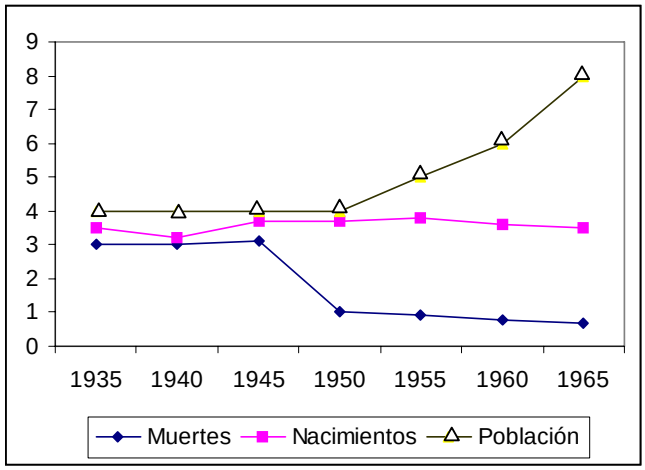
Ejercicio 9: Una función de la forma $q(t) = b - a\,2^{-kt}$, donde *b*, *a* y *k* son constantes positivas, se llama en muchas ocasiones ***curva de aprendizaje***. El nombre se debe a que psicólogos descubrieron que funciones de esta forma describen relaciones entre eficacia con que realiza la tarea un individuo y la cantidad de instrucción que ha recibido.
El ritmo al que un empleado puede clasificar correspondencia en una oficina de correos es función de la experiencia. El director del correo central de la ciudad de Buenos Aires, estima que después de *t* meses de trabajo un empleado medio puede clasificar $q(t) = 700 - 400\,2^{-0.7t}$ cartas por hora.

- ¿Cuál será el número aproximado de cartas que un empleado nuevo puede clasificar por hora?
- Un empleado con 6 meses de experiencia, ¿cuántas cartas puede clasificar?.
- Estimar cuál será el máximo que podrá clasificar un empleado medio.

Ejercicio 10: Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de una rara forma de gripe, aproximadamente $q(t) = \frac{20}{1+19.2^{-t}}$, miles de personas han contraído la enfermedad.

- ¿Cuántas personas tenían la enfermedad cuando ésta comenzó?
- ¿Cuántas personas tenían contraído la enfermedad al final de la segunda semana?

Ejercicio 11: El gráfico muestra la evolución de las variables **población**, **tasa de natalidad** y **tasa de mortalidad** en la Isla Mauricio, durante 1935 a 1965.
Interesa estudiar los efectos de la erradicación del mosquito transmisor del paludismo con la aplicación de un insecticida durante los años 1946 a 1948.



La población se mide en cientos de miles y las tasas de mortalidad y natalidad en porcentaje por año. Se eligieron las escalas para que coincidan los números sobre el eje vertical, este recurso se utiliza para poder representar datos de distinta naturaleza en el mismo gráfico.
Los datos están relacionados por la misma variable, en este caso años.

(a) Analizar la curva correspondiente a la variable población, antes y después del período 1946-1948.
(b) Indicar los efectos de la erradicación del paludismo en dicha variable.
(c) ¿En cuánto aumentó la población desde 1950 hasta 1955?.
(d) ¿Qué sucedió con la tasa de mortalidad antes y después del período 1946-1948? ¿y con la tasa de nacimientos?.
(e) ¿Qué se puede observar respecto de las diferencias entre las tasas de natalidad y mortalidad?

Ejercicio 12: Dibujar el par de puntos y calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos.
a) (3,-4) y (5,2) **b)** (1,2) y (-2,4)

Ejercicio 13: Para cada una de las rectas, determinar la pendiente y ordenada al origen.
a) $x - 5y = 20$ **b)** $y = -1$ **c)** $3y + x - 6 = 0$ **d)** $-3y - 2 = 9x + 10$ **e)** $x = 4$.

Ejercicio 14: Escribir la ecuación y dibujar la gráfica de las rectas que pasan por P y tienen pendiente *m*.

a) P(5,-2) ; $m = 4$ **b)** $P\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$; $m = \frac{3}{4}$ **c)** P(2,0) ; $m = -\frac{1}{3}$

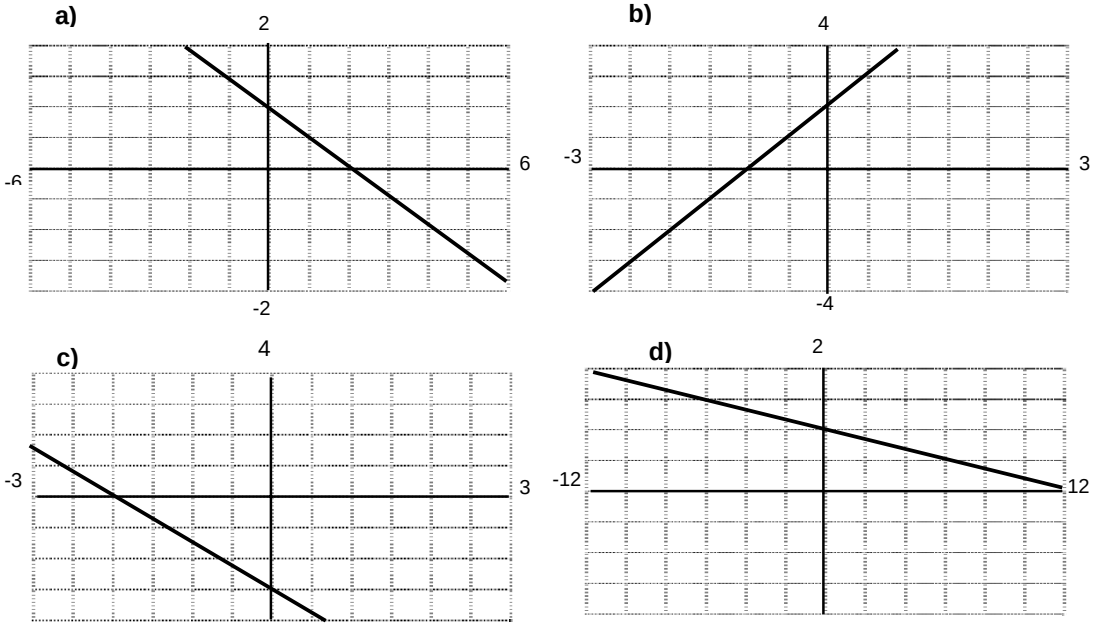
Ejercicio 15: Escribir la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados y luego graficar (b) y (c).

a) $P(0, 0)$ *y* $Q(1, -1)$ **;** **b)** $P(2, -4)$ *y* $R\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ **;**

c) $R(-2, -3)$ *y* $S(-4, 1)$**;** **d)** $S(-5, 2)$ *y* $P\left(2, -\frac{7}{2}\right)$

Ejercicio 16: Calcular la ordenada de los puntos cuya abscisa es 2 en las rectas (a), (b) y (c) del ejercicio 13.

Ejercicio 17: Para cada gráfica escribir la ecuación de la recta. Expresar su respuesta usando la *forma general* o la forma *pendiente-ordenada al origen* de la ecuación de una recta, la que prefiera.
Observar las escalas de cada eje, puede que no sean iguales.



Ejercicio 18: Encontrar las ecuaciones en forma general $ax + by + c = 0$.

a) De la recta que pasa por el punto (2,-1) y es paralela a $2x - 3y = 5$.
b) De la recta que pasa por el punto (2,-1) y es perpendicular a $2x - 3y = 5$.

Ejercicio 19: ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la de una recta perpendicular a la recta **r**: $3x - 2y = 0$ que pasa por el punto P(-3,5)?

a) -3x+2y = 19 **b)** 2x+3y = 9 **c)** 3x-y = -4 **d)** 2x+3y = 21

Ejercicio 20: Encontrar la ecuación lineal que expresa la relación entre la temperatura en grados Celsius *C* y la temperatura en grados Fahrenheit *F*.
Usar el hecho de que el agua se hierve a 100º*C* (212º*F*) y se congela a 0ºC (32º*F*) .
¿72º*F* a qué equivale en grados Celsius?

Ejercicio 21: El alquiler de una moto cuesta $3 de entrada, más $0.8 por cada hora. El tiempo máximo de alquiler es de 12 horas.
Teniendo en cuenta que el costo del alquiler es función del tiempo, determine la ecuación que describe la situación.
¿Cuánto se debe pagar si se alquila la moto durante 2 horas y 30 minutos?.
¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es la imagen?

Ejercicio 22: Un colectivo sale de una ciudad situada a 1100 *km* y viene hacia nuestra ciudad con una velocidad promedio de 90*km/h*. Escribir la ecuación que exprese a qué distancia se encontrará el colectivo de nosotros dentro de t horas.

Ejercicio 23: Una agencia inmobiliaria tiene un complejo de 50 departamentos para alquilar. Cuando el alquiler es de $580 por mes, los 50 departamentos están ocupados. Pero, cuando el alquiler es de $625, el número medio de departamentos ocupados es de 47. Suponiendo que la relación entre el precio del alquiler y la demanda de departamentos es lineal.
a) Dar la ecuación lineal que proporciona la demanda *D* en términos del precio del alquiler *p.*
b) Usar la función para predecir el número de departamentos ocupados si el alquiler es de $655 y si es de $595.-

Ejercicio 24: La siguiente tabla muestra los dividendos por acción de una empresa de 1990 a 1997. El tiempo en años se representa por *t*, correspondiendo *t* = 0 a 1990, y los dividendos se representan por *y*.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	$1,25	$1,63	$2,53	$2,32	$2,87	$2,99	$3,10	$2,95

a) Graficar los datos y unir mediante segmentos los puntos adyacentes.
b) Observando la pendiente de los segmentos, determinar los años en los que los dividendos decrecieron y crecieron más rápidamente.

Ejercicio 25: En un negocio donde hacen fotocopias las cobran según la cantidad: 0.10$ c/u hasta 20 copias; 0.07$, si se hacen de 21 a 50 copias; y 0.05 si son más de 50 copias.
a) Hacer una tabla de valores, tomar por lo menos cuatro cantidades de cada precio.
b) Hacer el gráfico de la situación, *Precio en función de cantidad de copias.*
c) ¿Es posible describir por medio de una fórmula lo anterior?

Ejercicio 26: Resolver los sistemas gráficamente y analíticamente.

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

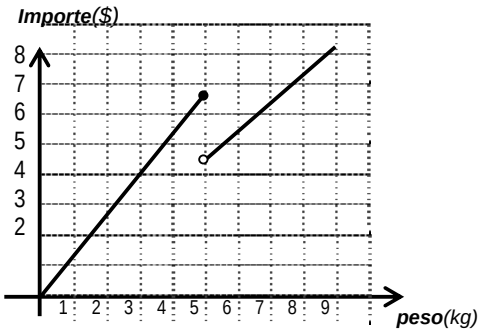
d) $\begin{cases} 4x + 6y = -8 \\ -2x - 3y = 4 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -5x - 5y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Ejercicio 27: Un fabricante puede vender cierto juguete que fabrica a $11 cada unidad. El costo total está formado por gastos generales (alquiler, empleados, etc.) de $750 más los costos de producción de $6 por unidad.

a) Dar la ecuación de la función costo total.
b) ¿Cuál es la función ingreso bruto por la venta del producto que fabrica?
c) Determinar cuántos juguetes debe vender para que el fabricante no tenga beneficio ni pérdida (**punto de beneficio nulo**).
d) Graficar en el mismo sistema de ejes, las dos funciones obtenidas.
e) ¿Qué ocurre si solamente puede vender 100 unidades del juguete?
f) ¿Cuántas unidades debe vender si desea ganar con la venta de ese producto 200 pesos?

Ejercicio 28: En una verdulería se lee el siguiente cartel de oferta de manzanas:

M A N Z A N A S
Hasta **5** kg a **1. 30 $** el kilo
Más de **5** kg. a **0. 90 $** el kilo



La gráfica peso-costo de la situación puede ayudar a responder las preguntas.

a) ¿Qué cuesta más, 4 kilos y medio o 5 kilos y medio?
b) Si dispone de $ 6, ¿Qué compraría? Explicar porqué.
c) ¿Hasta que cantidad superior a 5 *kg*. se paga menos que por 5 kilos exactos?
d) Si tiene $4.70 ¿cuántos kilos pide al vendedor?
e) Analizar el gráfico. ¿Qué puede decir sobre la oferta del verdulero?

Ejercicio 29: Para las funciones dadas por las fórmulas:

a) $f(x) = 3x + 7$ **b)** $f(x) = x^2 - 1$ **c)** $f(x) = -x^2 - x + 5$ **d)** $f(x) = 6$

Calcular $f(-2);\ f(t+1),\ f(-2+h);\ f\left(\frac{3}{2}\right);\ f\left(\frac{1}{t}\right)$

Ejercicio 30: Cierto agente de turismo ofrece viajes a Bariloche por 7 días para grupos de estudiantes, bajo las siguientes condiciones:
Tarifa individual para grupos menores de 30 personas: $ 500; tarifa individual para grupos entre 30 y 60 personas inclusive: $500 con un descuento de $5 por cada estudiante a partir del número 30; tarifa individual para grupos mayores de 60: $350.
a) Expresar la función de ingresos del agente de turismo como función de x, siendo x es el número de estudiantes que viaja. (o sea, dar la fórmula de la función)
b) Calcular el ingreso del agente para un grupo de 50 estudiantes y para un grupo de 25 .

Ejercicio 31: a) Graficar la función $f(x) = |3x - 1|$.
Recordar que conviene graficar la recta $f(x) = 3x - 1$ y luego aplicar la definición de valor absoluto.

b) Usando la gráfica de $f(x) = |x|$ graficar las funciones $g(x) = -|x|$ y $h(x) = |x| + 2$

Ejercicio 32: Representar la función dada por los puntos de la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	3	6	10	15	21

Verificar que responde a la ecuación $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

Ejercicio 33: Dibujar las gráficas de las parábolas:

a) $y = x^2 + 5$ **b)** $y = x^2 - 5$ **c)** $y = -x^2 - 5$ **d)** $y = -x^2 + 5$

Dar las coordenadas del vértice para cada caso.

Ejercicio 34: Dibujar las gráficas de las parábolas:

a) $y = (x-3)^2$ **b)** $y = (x+3)^2$ **c)** $y = -(x-2)^2$ **d)** $y = -(x+2)^2$

Dar las coordenadas del vértice para cada caso.

Ejercicio 35: Dar la ecuación de las parábolas que tienen la misma forma que $y=x^2$, pero el vértice se encuentra en el punto: **a)** (1,4) **b)** (-5,3) **c)** (-3,-6)

Ejercicio 36: Sin graficar ni hacer cálculos, para

a) $y = 4x^2 + 5$; **b)** $y = -2(x-2)^2$ **c)** $y = (x+1)^2 - 3$

¿Cuál es el vértice de las parábolas?

¿Cuál es la forma del gráfico?. Comparar con ecuaciones del tipo $y = ax^2$, y dar el valor de "*a*" en cada caso.

Ejercicio 37: a) Dar la ecuación de la parábola de vértice (0,2) y que pasa por el punto (5,0).
b) Dar la ecuación de la parábola de vértice (2,3) y que pasa por el punto (3,5). ¿Cuál es el eje de simetría?

Ejercicio 38: Determinar el vértice, eje de simetría y puntos de corte con ejes coordenados. Graficar.

a) $y = x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = -x^2 - 4x - 1$ **c)** $y = x^2 + 2x - 4$

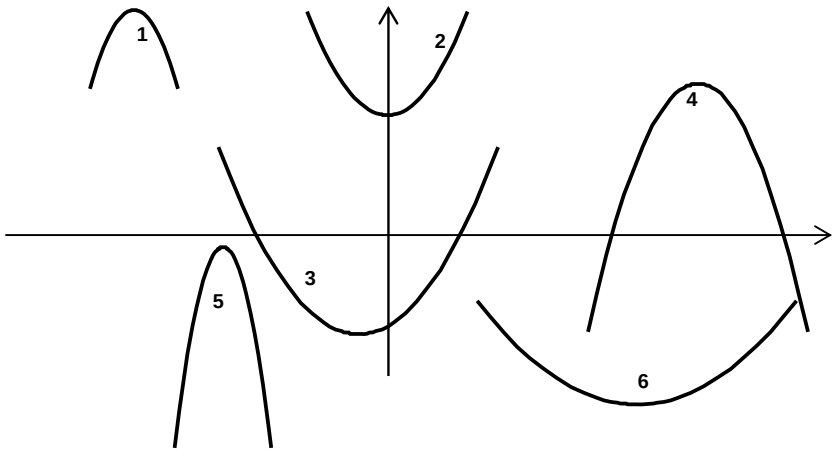
Ejercicio 39: Determinar los puntos de intersección con el eje x de las parábolas:

a) $y = -2x^2 + 6x - 5$ **b)** $y = 2x^2 - 4x - 1$ **c)** $y = 3(x-4)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 40: Si $f(x) = x^2 - 2hx + 1$, determinar para que valores de *h* se tiene Δ=0 ; Δ>0; Δ<0.
Graficar la curva que se obtiene para los valores de *h*:-2,-1,0,1,2.

Ejercicio 41: Se conoce que una función f tiene la forma $f(x) = a(x-h)^2$ y que pasa por los puntos (5,8) y (2,2). Determinar los valores de *a* y *h*.

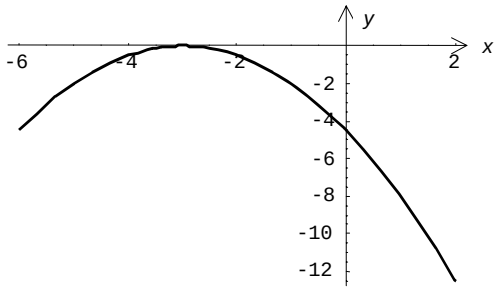
Ejercicio 42: En la siguiente figura se representan parábolas de ecuaciones $y = ax^2 + bx + c$, indicar: **a)** el signo de a. **b)** el signo de c.
c) ¿Cómo es el discriminante, Δ=0 , Δ>0 ó Δ<0?



Ejercicio 43: Un niño tira una piedra verticalmente hacia arriba. La relación que existe entre el tiempo *t* que la piedra está en el aire y la altura *s* que alcanza, está dada por la fórmula $s = -16t^2 + 48t$ (*t* en segundos y *s* en pies)

¿Cuándo alcanza la altura máxima la piedra? ¿Cuál es esa altura?

Ejercicio 44:



Para la parábola de la gráfica, dar las coordenadas del vértice y la ecuación.

Ejercicio 45: El beneficio semanal de una estación de servicio está de acuerdo con los litros de nafta sin plomo que vende, y se describe por la siguiente fórmula: $y = -x^2 + 46x - 205$.

La variable *x* se mide en miles de litros y el beneficio en pesos. La estación de servicio tiene capacidad de comercializar 50 mil litros por semana.

Se quiere conocer:

a) ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún litro de nafta?
b) ¿Cuántos litros se deben vender para que el beneficio sea máximo?
c) ¿Para qué cantidad de litros no hay pérdida ni ganancia?
d) ¿Cuántos litros de combustible deberían venderse para que la actividad sea rentable (produzca ganancia).

Ejercicio 46: Se corta un alambre de 24 metros de longitud en cuatro trozos para formar un rectángulo cuyo lado más corto mida *x.*

a) Expresar el área A del rectángulo en función de *x.*
b) Dar el dominio de la función.
c) Usar la gráfica para estimar el área máxima del rectángulo.
d) Conjeturar sobre las dimensiones del rectángulo *(largo - ancho)* que producen el área máxima.

Ejercicio 47: Un productor de naranjas, estima que si se plantan 60 naranjos en un cierto terreno, la producción media por árbol será de 400 naranjas. La producción media por árbol decrecerá en 4 naranjas por árbol por cada planta adicional que se plante en el mismo terreno.

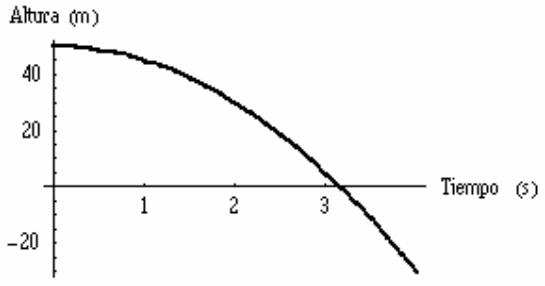
Expresar la producción total de este agricultor como función del número adicional de árboles plantados.

Dibuje el gráfico. ¿Cuál es el número de árboles que el agricultor debería plantar en el terreno para obtener una producción máxima? .

Ejercicio 48: Determinar la fórmula de la función de la gráfica. La misma describe la caída de una piedra desde un edificio de 50 metros de altura.

¿A qué altura se encuentra la piedra después de 2 segundos?

¿En que instante la piedra toca el suelo?



BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- EGB. Tercer Ciclo 8º Año. "Matemática 8". 1998. *C. Álvarez – F. Álvarez – L. M. Garrido – S.M. Martínez – A. Ruiz.* Ediciones Vincens Vives, S.A.

- EGB. Tercer Ciclo 9º Año. "Matemática 9". 1998. *C. Álvarez – F. Álvarez – L. M. Garrido – S.M. Martínez – A. Ruiz.* Ediciones Vincens Vives, S.A.

- Polimodal Primer Año. "Matemáticas 1, Ciencias". 1999. *C. Álvarez – F. Álvarez – A. Arribas - S.M. Martínez – A. Ruiz.* Ediciones Vincens Vives, S.A.

- Bachillerato "Matemáticas 1", 1994. *J. Colera – M. de Guzmán –* Grupo Anaya.

- Educación Secundaria "Matemáticas 2", 2003 *J. Colera – I.Gaztelu .* Grupo Anaya.

- Educación Secundaria "Matemáticas 3", 2002. *J. Colera – I.Gaztelu .* Grupo Anaya.

- Curso de preparación para Cálculo. 1992 *S.L.Salas –C.G.Salas*. Editorial Limusa.

- Matemática I. Modelos para interpretar la realidad. 2000. Camyrano-Net-Aragón. Editorial Estrada.

- Precálculo. 1997. M. Sullivan. 4ª Edición- Editorial Prentice may Hispanoamericana- México.

Respuestas a los Ejercicios

Capítulo I : Números (página 24)

1.- a) –11 ; **b)** 56 ; **c)** 2 **2.-** 17 y 71 ; 37 y 73 ; 79 y 97 **3.-a)** 1, 5, 10, 25, 50 ; 1, 2, 4, 7,14, 28 ; 1,73 **b)** 136 , **c)** 14 ; **5.-**

	V	F
a) 36 es divisor de *n* ?	X	
b) 85 es divisor de *n* ?		X
c) 50 es divisor de *n* ?		X
d) 120 es divisor de *n* ?	X	

6.- a) no ; **b)** 6 ; **c)** 5 ; **7.-** 432 y 936; **8) a)** 4213 , 1243, etc.; **b)** No es única; **9.-** 6336 ; 6996 ; **10.-** 29; **11.- a)** 15 ; **b)** 4 ; **c)** 81; **12.- b)** i) $m.c.m.(33,110)=330$; $\frac{5}{33}=\frac{550}{330}$; $\frac{7}{110}=\frac{21}{330}$ ii) $\frac{296}{3^5\cdot 2^5\cdot 7^3}$; $\frac{231}{3^5\cdot 2^5\cdot 7^3}$ **14.- a)** 3 **b)** $-\frac{4}{5}$ **c)** -12

15.- * Para transformar en un decimal exacto deben tener como denominador, un número que admita en su factorización solamente factores 2 ó 5 ó ambos.

* Para generar un decimal periódico puro, los denominadores, en su factorización, admiten factores distintos de 2 y 5 .

* Para generar un periódico mixto el denominador debe contener alguno de los factores 2 ó 5 y algún otro distinto.

16.- Decimales exactos: $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{23}{10}$; $\frac{13}{5}$ Decimales periódicos: $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{4}{9}$; **18.- a)** $25.\overline{8}=\frac{233}{9}$; **b)** $4.25=\frac{425}{100}$; **c)** $4.2\overline{5}=\frac{383}{90}$; **d)** $3.04\overline{7}=\frac{2743}{900}$; **e)** $0.15\overline{2}=\frac{137}{900}$ **f)** $1.23\overline{154}=\frac{123031}{99900}$; **19.-** 0.3333333… **20.- a)** $0.6=\frac{6}{10}$; **b)** $0.06=\frac{6}{100}$;

c) $0.006=\frac{6}{1000}$; **d)** $\frac{60}{10}=6$; **e)** $\frac{60}{100}=0.60$; **f)** $\frac{60}{1000}=0.060$; **g)** $\frac{345}{10}=34.5$; **h)** $\frac{5}{10000}=0.0005$; **k)** $\frac{532}{10000}=0.0532$ **21.- a)** $\frac{11}{4}$, **b)** $\frac{621}{37}$, **c)** $\frac{10}{33}$, **d)** $\frac{194}{75}$, **e)** $\frac{311}{9000}$

22.- **a)** $\frac{29}{3}$ **b)** $\frac{83}{12}$ **c)** $-\frac{31}{15}$ **d)** $\frac{1}{10}$ **e)** $\frac{2}{9}$ **f)** $\frac{54}{35}$ **g)** -9 **h)** $\frac{81}{256}$ **i)** -4 **j)** -36 **k)** $\frac{5}{3}$ **l)** $\frac{53}{9}$ **m)** $-\frac{215}{24}$ **n)** 1 **o)** $\frac{323}{9}$ **p)** $\frac{10}{3}$ **23.- a)** 1 **b)** $\frac{7}{5}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{10}{27}$ **e)** $\frac{191}{13}$

24.- i) **a)** correcto, **b)** incorrecto, **c)** incorrecto, **d)** correcto, **e)** incorrecto, **f)** correcto, **g)** incorrecto, **h)** incorrecto, **i)** correcto.

ii) **a)** 2 **b)** $\frac{-5}{x(x-1)}$ **c)** $\frac{6y+20x-5}{10xy}$ **d)** $\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$ **25.-** **a)** $\frac{5}{8}$ **b)** 80 **c)** $\frac{9}{2}$

26.-

Porcentaje	Fracción	Nº decimal
50%	1/2	0,5
25%	1/4	0,25
75%	3/4	0,75
20%	1/5	0,2
60%	3/5	0,6
80%	4/5	0,8

27.- 1º club 12,5%; 2º club 37,5% **28.-** 220 águilas **29.-** un aumento del 8% respecto del valor inicial. **30.-** 250.000 automóviles. **31.-** Beneficio del 4%. Lo vendió a $ 124.80 **32.-** Incremento del 45,6% **33.-** 4,65% **34.-** 33,3% **35.- a)** 50 litros, **b)** 200 *km*.

36.- $\frac{3}{7}$ del total. **37.-** En el curso de 30 alumnos. **38.-** $ 45 **39.-** $\frac{9}{20}$ **40.-** 35 alumnos **41.-** 90 **42.-** el 1º ciclista **45.- a)** $n=-7$; **b)** $n=16$ **46.- a)** $2540.187 = 2.540187 \cdot 10^{3} = 25401870000.10^{-7}$;**b)** $0.0000215 = 2.15 \cdot 10^{-5} = 0.00215 \cdot 10^{-2}$

47.- $1.338 \cdot 10^{18}\ m^3$; **48.-** $A = \frac{2^4}{3^3}$ **49.- a)** 327.3 **b)** 23.1 **c)** 2.7 **d)** $327.\overline{3}$ **e)** $277.\overline{7}$ **f)** 3.273 **g)** 0,00231

h) $0{,}0342\overline{6}$ **i)** 1,342572 **50.- a)** 3.773 **b)** 0.0231 **c)** 013614 **d)** 0.00027 **e)** 0.327373 **f)** 3273 **g)** 23.1 **h)** $32733.\overline{3}$ **i)** 15.6 **51.-** $-5^2+1=26$ se lo ha resuelto como $(-5)^2+1=25+1=26$ $(3-\pi)^2=9-\pi^2$ se ha usado como si valiera la propiedad distributiva $4 \cdot 3^2 = 144$, se ha resuelto haciendo $(4 \cdot 3)^2 = 144$ $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$ se ha elevado solamente el numerador al cuadrado $3^2+4^2=7^2$ se ha resuelto haciendo $(3+4)^2=7^2$ $4^2-3^2=25$ se ha usado como regla que todo número elevado al cuadrado da positivo y se hizo $16+9=25$ **52.- a)** $7\sqrt{2}$ **b)** $-22\sqrt{2}$ **c)** $-\sqrt{5}$ **d)** $7\sqrt[3]{2}$ **e)** $2\sqrt[6]{2^5}$ **f)** $13\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ **53.- a)** 7; **b)** 2 ; **c)** 3 **54.-** $A+B=\frac{3}{2}$; $A.B=\frac{3}{8}$ **55.- a)** $1-\sqrt{2}$; **b)** 4; **c)** $\frac{13}{3}$ **56.- a)** $3\left(\sqrt{2}+1\right)$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $2\sqrt{x}$ **d)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **e)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **f)** $\frac{5\left(3\sqrt{2}+1\right)}{17}$ **57.-** El menor de los números es $\frac{\sqrt{5}}{x+1}$; los números dados en **a)** y **c)** son menores que 1; del número dado en **b)** no se puede afirmar ninguna de las dos relaciones. **58.- a)** F ; **b)** V ; **c)** V ; **d)** V; **e)** F **f)** F **59.-** $2+6\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}+4$ **60.- a)** $x^{49/15}$ **b)** $y^{7/8}$ **c)** $x^{3/4}$ **d)** $m^{-5/6}$ **e)** $x^{5/6}$ **f)** 1

61.- $a+b=10$, es entero; $a^2+b^2=66$, es entero. **62.- a)** 400 ; **b)** 0.1 ; **c)** 0.05 **63.-** Por defecto: 1.414 ; Por exceso: 1.415, **64.- a)** 0.33 **b)** 0.17 **c)** 0.78 **d)** 0.28 **e)** 0.58 **f)** 0.43 **g)** 0.93 **h)** 1.23 **65.- i)** V **ii)** V **iii)** F **iv)** F

66.- a) $(2{,}5)$ **; b)** $[-1{,}3]$ **; c)** $(4{,}6]$ **; d)** $[7,\infty)$ **; e)** $(-\infty,-3]$ **68.- a)** $[-7,+\infty)$**; b)** $(-\infty,7)$**; c)** $\left(-\frac{1}{2},\sqrt{15}\right]$ **; d)** $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{2}\right]$ **; e)** $\left[-\frac{13}{5},-1\right)$ **69.- a)** [0,4] **b)** [4,6) **c)** (-3,-1] **d)** [-2,0] **e)** $\left(-\frac{2}{3},5\right)$ **f)** [- 0.5,4.5] , **g)** $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$, **h)** $-5,-\left(\frac{5}{2}\right)$

70.- a) $\{x / 2 \le x \le 5\}$; **b)** $\left\{x / -\frac{3}{4} \le x < \frac{7}{2}\right\}$; **c)** $\left\{x / 2 < x \le \frac{9}{4}\right\}$; **d)** $\{x / -3 < x < 5\}$; **e)** $\{x / x \le 3\}$, **f)** $\{x / -2 \le x \le 5\}$; **g)** $\{x / -1 \le x\}$; **h)** $\left\{x / \frac{1}{4} \le x < \frac{7}{3}\right\}$

Capítulo 2: Lenguaje algebraico y ecuaciones

Ejercicios (página 34)

1: a) $(n+m)^2 = n^2+m^2+2nm$, *para* $n,m \in N$; **b)** $e = v \cdot t$; **c)** $x^{10} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{10 veces}$;

d) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$; **e)** $a, b, c \in Z$, $a+b+c=54$; **f)** $n \in N, n>1$, $n-1, n, n+1$;

g) $x^2 = 121$; **h)** $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

Ejercicios (página 35)
2: Son identidades a), b), d) y e)

Ejercicios (página 36)
1.- a) $x = 3/8$; **b)** $x = 1$; **c)** $x = 7$; **d)** $x = -2/3$; **e)** infinitas soluciones; **f)** no tiene solución; **g)** $x = -1$; **h)** $x = -\frac{4}{3}$; **i)** $x = 8$; **j)** $x = 0$; **2.- a)** $x = -\frac{2}{3}$; **b), c) y d)** no son ecuaciones de primer grado ; **3.- a)** 15, 16 y 17 ; **b)** 37, 39 y 41 ; **4.-** $4800 cm^3$.

Ejercicios (páginas 39)
1.- a) 2.4 y grado 1; **b)** –3 y $-\frac{1}{2}$, no es polinomio; **c)** $\frac{1}{2}$ y grado 1; **d)** 0 y $-\frac{1}{2}$ y grado 2; **2.-a)** Ecuación completa, $t_1 = -3$ *y* $t_2 = 1$; **b)** Ecuación completa**,** $t_1 = -2 + \sqrt{7}$ *y* $t_2 = -2 - \sqrt{7}$; **c)** Ecuación completa, $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -1$; **d)** Ecuación completa**,** $v_1 = -7$ *y* $v_2 = 3$; **e)** Ecuación incompleta $t_1 = 0$ *y* $t_2 = -4$; **f)** Ecuación incompleta, $t_1 = 1$ *y* $t_2 = -1$; **3.- a)** Raíces reales iguales ; **b)** Raíces reales distintas ; **c)** Raíces no reales ; **4.- a)** $d > 0$, raíces reales distintas; **b)** $d > 0$, raíces reales distintas ; **c)** $d < 0$, raíces no reales ; **d)** $d > 0$, raíces reales distintas; **5.- a)** $x_1 = 3$ *y* $x_2 = 4$; **b)** $-(x_1 + x_2) = -7$ y $x_1 \cdot x_2 = 12$; **7.-** $n_1 = n_2 = -2$; **8.-** 2 *y* 1

Ejercicios (página 44)
1.- a) $(6, 30)$; **b)** $(15, 12)$; **c)** $(2, 4)$; **d)** $(3/2, -2)$; **e)** No tiene solución ; **f)** $(-13, -29/5)$; **g)** No tiene solución ; **h)** Infinitas soluciones ; **2.-** la base mide 0.06 *m* y la altura 0.025 *m* ; **3.-** los números son 20 y 61 ; **4.-** Las dimensiones del campo son 10 *km* por 5 *km*

Ejercicios (página 46)
1.- a) $(2, -1)$; **b)** $(-13, 11)$; **c)** $(5/2, 1/2)$; **d)** $(-1/2, 2)$; **2.-** 11 pavos y 25 corderos ; **3.-** 13 habitaciones simples y 37 habitaciones dobles ; **4.-** 215 boletos de $8 y 310 con descuento ; **5.-** Lados iguales miden 0.07 *m* y el desigual 0.04 *m*

Ejercicios (página 52)
1.- 44 palomas ; **2.-** 8 bancos y 75 alumnos ; **3.-** 24 *grs*. de plata ; **4.-** 18 años; **5.-** 15 *m* ; **6.-** 24.14 *km*

PRÁCTICO (página 53)

1.- a) $x = 5$; **b)** $x_1 = -3$ *y* $x_2 = 1$ **; c)** $x = 36$; **d)** no es ecuación ; **2.- a)** $x = 3/8$ y grado 1 ; **b)** $x = 1$ y grado 1; **c)** $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ y grado 2 ; **d)** $x = -2$ y grado 1 ; **e)** $x_1 = x_2 = -3/2$ y grado 2 ; **f)** sin solución real y grado 2 ; **3.-** Son verdaderas a), d), f), g), i) y j) ; **4.- a)** $x = 2a/3$; **b)** $x = a/5$; **c)** $x = 1$; **d)** $x = 4$; **5.- a)** $x = 1/8$; **b)** $x = -2/23$; **c)** $x = 28$; **d)** $x = -6$; **e)** $x = -12$; **f)** $x \neq 0$ *;* $x = 16/11$; **6.- a)** $x_1 = 3$ *y* $x_2 = -3/2$; **b)** $x = 5/3$; **c)** $x_1 = x_2 = 5/2$; **d)** $x_1 = 11$ *y* $x_2 = -4$; **7.- a)** $x = -19$, grado 1; **b)** $x = -18/7$, grado1; **c)** $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -1$ y grado 2; **d)** $x = -10/3$, grado 1; **e)** $x = -1/3$, grado 1; **f)** Sin solución real, grado 2; **g)** Sin solución real, grado 2; **h)** $x_1 = 3$ *y* $x_2 = -5$ y grado 2; **i)** $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ y grado 2; **j)** $x_1 = -3$ *y* $x_2 = -7$ y grado 2; **8.-** $a = 11/4$; **9.- a)** $k = 21$ y la otra raíz es 3; **b)** $k = 25$ y las raíces $x_1 = x_2 = 5$; **10.-** La otra raíz es $x_2 = 7$ *y* $a = -9$; **11.-** $k_1 = 0$ no tengo ecuación cuadrática y $k_2 = 1$, las raíces son $x_1 = x_2 = 1$; **12.- a)** k = 10; **b)** Obtenemos dos valores: $k = 2$, respeta las raíces que nos da el ejercicio y $k = 14$ no respeta las raíces que nos dan, por lo tanto no es solución; **c)** $k = 1$; **13.-** $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$; **14.- a)** No, por que no existe el término cuadrático ; **b)** Si, por que existe el término cuadrático, aunque la

solución sea la trivial; **15.- a)** raíces reales iguales ; **b)** raíces reales distintas ; **c)** no tiene solución real ; **16.- a)** (considerar la suma y producto de las raíces), $3x^2+10x+2=0$; **b)** $k=1$, $x_{1,2}=5\pm 2\sqrt{6}$; **17.- a)** $x^2-2x+1=0$; **b)** $x^2-9=0$ **; c)** $x^2-2x-8=0$; **18.- a)** $(2,-1)$; **b)** $(8,1)$; **c)** $(1,\ 2)$; **d)** sin solución; **e)** infinitas soluciones; **f)** infinitas soluciones ; **g)** $(-53,38)$; **h)** sin solución; **i)** infinitas soluciones ; **19.- a)** $(36,27)$; **b)** $(3,5)$; **20.- a)** $k=1/4$; **b)** $k=\frac{2}{25}$; **21**.- 6 y 8; **22**.- Si, en $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; **23.-** 32000 cm^2 ; **24.-** Dos números solucionan el problema: 2 y 1; **25.-** 2*A*, 4*A* y 6*A*; **26.-** 0.003 *A* ; 0.009 *A*; **27.-** 24 años ; **28.-** 6.50 *m* por 4 *m*; **29.-** 5 *Km / h* y 3 *Km / h* ; **30.-** 10 *A* ; **31.-** 4Ω y 12Ω ; **32.-** 5/14 ; **33.-** 23 y 77 ; **34.-** 16; **35.-** 12 mm por 8 mm ; **36.-** C ; **37.-** D ; **38.-** B ;**39.-** 20 gramos de oro puro y 40 gramos de oro 12 quilates ;**40.-** 5 **; 41.-** 180000 cm^2 ; **42.-** el de radio de $3+3\sqrt{2}\approx 7.24\,cm$. **43.-** $18 ; $ 13; **44.-** 30; **45.-** No ; Si y las dimensiones son 85 *m* por 65 *m*; **46.-** 48 años ; 24 años; **47.-** 6 deudores; **48.-** 4 *hs* y 12 *hs*; **49.-** $130, $105 y $ 100; **50.-** 60 *Km*; **51.-** 11538 hm^2 ; **52.-** 7 ; 165 centavos; **53.-** 21 y 43 ; **54.-** 600 *Km/h* ; 60 *Km/h* ; **55.-** 1 hora 20 minutos.

Capítulo 3 : Expresiones Algebraicas

Ejercicios (Pág. 62)

1.- a) $\text{gr}(P(x))=4$ **,** coef.1, -2, 0, 3, 3; $\text{gr}(Q(x))=3$ **,** coef. 3, 5, 0,-11; $R(x)$ no tiene grado, coef. 0 **b)** $x^4+x^3+5x^2+3x-8$ **c)** $x^4-5x^3-5x^2+3x+14$ **d)** x^4-2x^3+3x+3 **e)** gr(*S*(*x*)) = gr(*T*(*x*)) = gr(*U*(*x*)) = 4; **2.- a)** *d* = 5; *c* = 4; *b* = -6; *a* = -1

b) *d* = -6; *c* = 1; *b* = -6; *a* = -3; **3.- a)** $-x^3-20x^2-55x+25$ **b)** $18x+24$

Ejercicios (Pág. 64)

1. a) x^3-3x^2-3x-4 **b)** $2x^5+2x^4-3x^3+2x-1$ **c)** $2x^5-5x^4+4x^3-x^2-8x+4$

2.- $gr\left(A(x)\,.\,B(x)\right)=5$ **3.-** $\left(2x^2+7x+6\right)\div(x-2)$ **4.- a)** $4x^2-2x+\frac{1}{4}$

b) $8x^3-6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}$ **c)** $9x^2-4$ **d)** x^2-2 **e)** x^4-625 **5.a)** $(x-3)^2$ **b)** $(4x-7)(4x+7)$

c) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ **d)** $(x-1)^3$ **e)** $\left(\frac{2}{5}-x\right)\left(\frac{2}{5}+x\right)$ **f)** $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$

Ejercicios (Pág. 66)

1.- a) $gr\left[c(x)\right]=2$ **b)** $gr\left[r(x)\right]<2$ **2.- a)** $1+\frac{7}{5x}$ **b)** $1+\frac{4}{x^2+x+1}$ **c)** $5x-5+\frac{1}{x+1}$

d) $x^2+4x+18+\frac{70x-15}{x^2-4x+1}$ **e)** $2x^2-4x+7$ **3.- a)** $m=58$ $n=-18$ **b)** $m=\frac{117}{2}$ $n=-21$

Ejercicios (Pág. 69)

1.- a) x^2+7 $r=10$ **b)** $x^3+3x^2-9x+26$ **,** $r=-88$ **c)** x^3+x **,** $r=1$

d) $\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}$ **,** $r=\frac{-17}{9}$ **2.-** $m=2$

Ejercicios (Pág. 71)

1.- a) $P(1)=4$ **b)** $P(0)=3$ **c)** $P(2)=63$ **d)** $P(-1)=0$ **e)** $P(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+11$ **2.- a)** –93 **b)** 0 **c)** 16 **d)** –3 **3.- a)** $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ **;** resto 0 **b)** $\left(x^4+3x^3+2x^2+3x+1\right).(x-3)$

Ejercicios (Pág. 77)

1.- 2 y 3 no son raíces del polinomio porque no dividen a 11. **2.- b**) $x+3$ no puede serlo porque -3 no divide a 4. **c)** $(x-1)(x-2)(x+2)$ **3.- a)** $(x-2)(x+3)(x+5)$

b) $4x(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)$ **c)** $2(x-2)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ **d)** $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$

e) $3(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$ **f)** $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$ **4.- a)** $a\,x^3+4a\,x^2-11a\,x-30a$ con $a \in R$ **b)** una de las raíces debe ser doble, por ej. - 2: $a(x+2)^2(x-3)(x+5)$ con $a \in R$

EJERCICIOS (Pág. 80)

1. a) $\frac{1}{ax^3}$ **b)** $\frac{x}{x+1}$ **c)** $\frac{1}{x+5}$ **d)** $\frac{1}{x}$ **e)** $-(x+2)$ **f)** $\frac{3x+2}{3x-2}$ **2.- a)** $\frac{2x+3}{x+2}$ **b)** $-\frac{(x+4)}{(x+5)^2}$ **c)** $\frac{(2-x)(x+3)}{(x-3)(x+2)}$

d) $\frac{x(x-3)}{x+2}$

Practico: Expresiones Algebraicas (Pag. 81)

1.- $\frac{x^2}{2}$ **2.- a)** $2xy$ **b)** $\sqrt{9x^2+y^2}$ **3.- a)** $x^2+\frac{3}{2}x$ **b)** $\frac{1}{2}x^2+15x$ **4.- a)** Área lateral: $4x^2+12x$; Área total: $6x^2+12x$; Volumen: x^3+3x^2 **b)** Área lateral: $12x^2-6x$; Área total: $14x^2-8x$; Volumen: $3x^3-3x^2$ **5.-** suma: $6x^3-x^2+5x+1$; diferencia: $2x^3-9x^2+7x-9$ **6.-** $x=3$ **7.- a)** $3x^4+2x^3-8x^2-4x+1$ **b)** $x^2-5x+13$

c) $2x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{31}{2}x+\frac{47}{2}$

d) $3x^6-3x^5-5x^4+8x^3-3x^2-5x+5$ **e)** $3x^6-3x^5-5x^4+8x^3-4x^2-5x+9$

f) $3x^4-x^3-7x^2-x-10$ **g)** $\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$ **h)** $x+1$; -9 **i)** $1; -x+5$ **8.-** a = 2 ; b = 1 **9.-** c = 3 y a y b pueden ser cualquier número real, luego el polinomio no es único. **10.- a)** $x^4+4x^3+2x^2-4x+1$ **b)** $x^6+2x^5-x^4+3x^2-2x+1$; **11.-** a = 0, b = 4, c = 1, d = 1 ó a = 0, b = 4, c = 1, d = -3

12.- a) $x^3-2x^2+\frac{x^2}{x^3+2x^2}$ **b)** $\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{4}x+\frac{49}{8}+\frac{25}{2x-4}$ **c)** $x-1+\frac{3x+2}{x^2-1}$ **d)**

$-4x^2-2x-1+\frac{-13x^2+10x+1}{2x^3-x^2+1}$

13.- $4x^5-x^4+9x^3-5x^2+9x-12$ **14.-** $m=-1$ **15.- a)** $3x^2-2x+1$ $r=0$ **b)** $x^4+3x^3+9x^2+27x+71$ $r=206$

c) $x^3-2x^2+5x-10$ $r=22$ **d)** $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$ $r=\frac{5}{4}$ **e)** $x^3+5x^2+10x+17$ $r=29$ **f)** $x^4+3x^3+9x^2+27x+81$ $r=0$ **16.-** $k=-2$ **17.-** $r=0$ **18.- a)** SI **b)** Si **c)** NO **d)** NO **e)** NO **f)** NO **g)** SI **h)** SI **19.-** $m=-7$ $n=-60$ **20.-** $a=-2$ $b=-8$

21.- $-2x+3$ **22.-** $3(x-3)(x+3)(x+5)\left(x-\frac{2}{3}\right)$ **23.-** $x^3+5x^2-29x-105$ **24.- a)** $x_1=x_2=5$ **b)** $x_1=4$ $x_2=1$ **c)** $x_1=\sqrt{3}$ $x_2=-\sqrt{3}$ **d)** $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=-1$ **e)** $x=1$ **f)** $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$ **25.- a)** 3 x^3 – 16 x^2 + 3x + 10 **b)** 3 x^2 -12x + 6 **26.- a)**

$(x+2)^2\ (x+3)$ **b)** $x^3\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$ **c)** $4(x-1)\,(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ **d)** $2x(x+1)^2(x-5)$

e) $6(x+2)\,(x+1)$ **f)** $2(x+1)\,(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **g)** $(x-2)\,(x+2)\,(x-3)\,(x-5)$ **h)** $x(x-1)^2$

i) $4(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$ **28.-** 21% **29.- a**) SI **b)** NO **c)** SI **d)** NO **30.- a)** $\frac{x}{a}$ **b)** $\frac{3x}{2y}$ **c)** $2x$

d) $\frac{1}{x+1}$ **e)** $x^2(x+2)$ **f)** $-x$ **g)** $\frac{x}{5}$ **h)** $\frac{x}{x+1}$ **i)** $\frac{x+1}{x+3}$ **j)** $\frac{4(2x+3)}{2x-3}$ **k)** $-\left(x^2+1\right)$

l) $\frac{x+2}{x-3}$ **31.-** (a) es equivalente a (d) ; (b) es equivalente a (c). **32.- a)** $\frac{x^3y^2(x+y)^2}{x^2y(x+y)^3(x-y)}$;

$\frac{y(x+y)^2(x-y)}{x^2y(x+y)^3(x-y)}$; $\frac{x^3(x-y)}{x^2y(x+y)^3(x-y)}$ **b)** $\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x+3)}$; $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$;

$\frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)(x+3)}$ **33.- a)** $\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$ **b)** $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$ **c)** $-\frac{(x+2)}{x(x-1)}$ **d)** $\frac{x\left(x^2+2x-1\right)}{(x-1)(x+1)^2}$

34.- (b) **35.- a)** $\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{2x(x-2)(x+2)}$ **b)** $\frac{1}{x^2(3x-1)}$ **c)** $\frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$ **36.- a)** $3(x-2)$ **b)**

$\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-4)}$ **c)** $\frac{x(x-2)}{4(x+2)}$ **37.- a)** $\frac{9}{x+3}$ **b)** $\frac{2x^2}{1-x^2}$ **c)** $-\frac{1}{x}$ **d)** $x-y$ **e)** $\frac{x-5}{x}$

f) $3(x+1)$ **g)** $\frac{-x^2-12x+9}{(x+3)^2(x-3)^2}$ **h)** $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$ **i)** $\frac{1}{c}$ **j)** 5 **k)** x^2 + xy + y^2 **l)** 10 **m)**

$-\frac{(y+3)(y-1)}{4(y+1)(y-3)}$ **n)** $\frac{x+1}{x-1}$ **o)** 0 **p)** $\frac{9}{\frac{m}{2}-1}$

Capítulo 4 : Tópicos de Triángulos (Pág. 98)

1: El complemento es $42^o\ 44'\ 18''$ y el suplemento es $132^o\ 44'18''$; **2:** $74^o10'55''$;

3: $\hat{8}=\hat{5}=\hat{7}=132^o$ y $\hat{6}=\hat{2}=\hat{1}=\hat{3}=48^o$; **4**: 1) $\alpha+\beta=153^o52'56''$, 2) $\beta-\gamma=36^o16'59''$,

3) $\alpha+\beta-\gamma=68^o23'59''$, 4) $2\alpha=64^o14'$ 5) $\beta:5=24^o21'11''.2$,

6) $2\alpha+\beta:5=88^o35'11''.2$

5:

α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$	3α	$\beta:4$
60º 35′	48º 28″	108º35′ 28″	12º34′32″	181º45′	12º7″
126º 34′ 18″	72º 27′ 46″	199º 2′4″	54º 6′32″	379º 42′54″	18º 6′56.5″
143º 16′	85º31′4″	228º 47′ 4″	57º44′56″	429º48′	21º22′46′′

6: Es 54^o; **7:** 2hs 24′ ; **8**: 17′8″.57 ; **9**: Por alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal; **10:** 60^o ; **11:** $35^o10'43''$ y $109^o38'34''$; **12:** $\alpha=103^o$ y $\hat{A}=77^o$.**13:** De acuerdo con la figura de análisis, completen el cuadro siguiente.

$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
32^o	46^o	102^o	148^o	134^o	78^o
127^o	$32^o35'$	$20^o25'$	53^o	$147^o25'$	$159^o35'$
60^o	35^o	85^o	120^o	145^o	95^o
$120^o5''$	$25^o15'55''$	$34^o44'$	$59^O59'55''$	$154^O44'5''$	$145^o16'$

14: a) $\hat{1} = 65^o$, $\hat{2} = 81^o$, $\hat{3} = 34^o$**;** **b)** $\hat{1} = 69^O$, $\hat{2} = 63^O$, $\hat{3} = 48^O$, $\hat{4} = 132^O$**;** **18:** $\alpha = 130^o30'$, $\beta = 139^o30'$; **19:** $h = 4 \times \sqrt{3}\, cm \cong 6.93\, cm$, $A = 16\sqrt{3}\ cm^2 \cong 27.71 cm^2$; **20: c)** para el item a) $\overline{AC} \cong 3.21 cm$ y para el item b) $\overline{AC} \cong 22.5\, cm$; **21:** $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{11}{7}$; $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{11}{4}$; $\frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{4}{7}$ **23**: $x = 4.125\, cm$ **24: a)** Sí, razón 15. **b)** No. **c)** Sí, razón 10.; **26) a)** x = 7 **b)** 8 , 6 ; **28)** $\overline{B'C'}$ = 10 m , $\overline{BC}$ = 6m y $\overline{CD}$ = 1.5 m. ; **29)** 85 m; **30) b)** 12 y 16

Capítulo 5 : Resolución de Triángulos Rectángulos (Pág. 119)

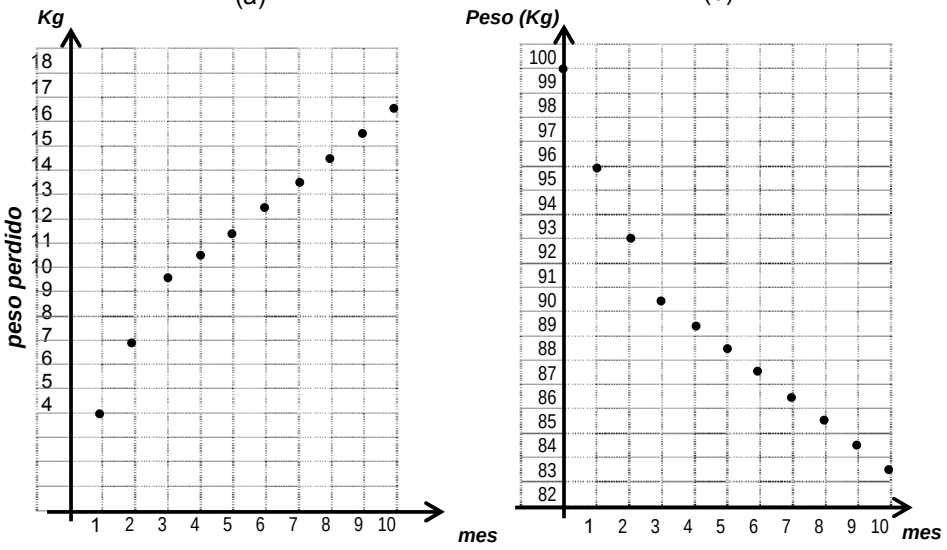
1.- $\frac{7\sqrt{2}}{2} cm \cong 4.95\, cm$; **2.-** *perímetro* $= 50\, cm$, *área* $= 60\, cm^2$; **3**.- $96\, cm^2$; **4.-** $2\sqrt{3}\, cm \cong 3.46\, cm$; **5.- a)** $\sqrt{10}\, cm$ *y* $3\sqrt{10}\, cm$; **b)** $15\, cm^2$; **6.- a)** 10 *cm*; **b)** 8.94 *cm;* **7.- a)** $2\sqrt{2}\ m$, **b)** aproximadamente 0.84 *m*; **c)** $\sqrt{10}\ dm$; **8.-** 4.5 *cm* , 3 *cm* , $\frac{3\sqrt{13}}{2} \cong 5.41 cm$ ***9.-*** **a)** $\frac{34}{45}\pi \cong 2{,}3736\ \text{rad}$, **b)** $\frac{\pi}{4} \cong 0.7854\ \text{rad}$,**c)** $\frac{47}{36}\pi \cong 4.1015\ \text{rad}$, **d)** $\frac{1}{3}\pi \cong 1.0472\ \text{rad}$, **e)** $\frac{5}{3}\pi \cong 5.236\ \text{rad}$, **f)** $\frac{7}{3}\pi \cong 7.3304\ \text{rad}$; **10.- a)** 60^o; **b)** 108º; **c)** 30º; **d)** 150º ; **e)** 135º; **f)** 450º; **11.- a)** $cos\ \sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ en el primer cuadrante; **b)** $cos(90^o - \sigma) = \frac{1}{3}$; **12.-** $sen\ \sigma = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ y $cos\ \sigma = \frac{\sqrt{17}}{17}$; **13.- a)** $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$ *y* $tg\alpha = \frac{3}{4}$; **b)** $sen\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$ y $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; **14**.- **I)** a = 10.72 ; *c* = 11.83 ; A = 65º ;
II) c = 8.49 ; *b* = 6 ; A = 45º ; **III)** *a* = 0.85*; c* = 4.10*; B* = 78º ; **IV**) *c* = 10*; b* = 8.66*; B* = 60º ; **V)** a = 6.43; b = 7.66 ; *B* = 50º ; **VI)** *a* = 8.16*; b* = 3.80*; A* = 65º ; **VII)** *c* = 8.25 ; $A = 14^o2'10''.5 \cong 0.245\ rad$ $B = 75^O57'49''.52 \cong 1.3258\ rad$; **VIII)** *b* = 4.58 $A = 23^o34'41''.44$; $B = 66^o25'18''.55$; **IX)** *a* = 4.47*;* $A = 48^o11'22''.86$; $B = 41^o48'37''.13$;
15.- $a = 5$; $cos\, B = 0.8$; $tag\, B = \frac{3}{4}$; $cos C = 0.6$; $sen C = 0.8$; $tag\, C = \frac{4}{3}$;
16.- $\frac{3\sqrt{15}}{4} cm \cong 2.9\, cm$;**17.-** 16.24 *cm* , 13.5 cm^2; **18.-** 51.764; **19.-** 10 *cm*.; **20.-** 6 *cm*; **21.-** $12^o42'2''.52$; **22.-** 253.73 *m*; **23.-** 29.37 *m*; **24.-** 2019.6 *m*; **25.-** 43.30 *m*; **26.-** 2.73 *km*; **27.-** 10.98 *m*; **28.-** $14^o47'19''.23$;
29.- $80^o37'50''$; **30.-** $5\sqrt{5}$; **31.-** $4\sqrt{2}\ cm$; $2\ cm^2$; **32.- a)** $8\sqrt{2}\ cm$; 16 *cm* **b)** 73,06 cm^2 **c)** $(64\pi - 128) cm^2$

33.- $5\sqrt{5}$; $12\sqrt{5}$; **34.-** $-\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$; **35.-** $cos\,\delta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tg\,\delta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; **36.- I:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **II:** $\frac{1}{2}$, **III:** 0 , **IV:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Capítulo 6: Funciones

EJERCICIOS (página 128)

1.- (a) (b)



(c) Puede observar que el gráfico (a) es creciente, es decir al aumentar el número de meses de tratamiento, aumenta el peso que pierde el paciente. El gráfico b) es decreciente, al aumentar el número de meses de tratamiento, disminuye el peso del paciente.

2.-a) Porque para algunos valores de x hay mas de un valor de y, en algunos puntos hasta 3.
b) Porque hay un punto que tiene dos imágenes, basta que un punto no cumpla la condición para que toda la gráfica no represente una función.

3.- a) A las 8 hs; **b)** 6,5 *km*; **c)**1 hora; **d)** 20 *km*; **e)** 3 hs **4.-** $f(0) = 1$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{93}{8}$ y $f(\sqrt{2}) = 1$;

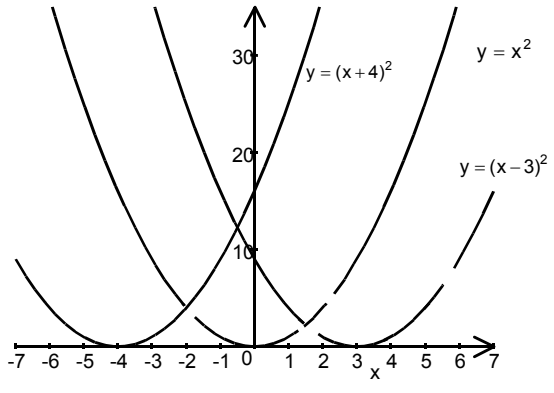
$f(h+1) = h^3 + 3h^2 + h$.

5.- x = 0 y x = 4 verifica *g(x)* = 7. Ningún número real *x* real verifica *g(x)* = 2. **6.- a)** La tabla 1, no representa una función hay dos valores para x = 4 (f(4) = 2 y f(4) = -2). **b)**La tabla 2, sí es una función, ya que para cada valor de x le corresponde un solo g(x). **c)**La tabla 3, sí es una función, ya que para cada valor de x le corresponde un solo h(x). **d)**La tabla 4, no representa una función ya hay dos valores para x = 0 (s(0) = 1 y s(0) = 0).

EJERCICIOS (página 131)

2.- $y = \frac{3}{2}x$; $y = -2x$; $y = \frac{1}{2}x$

EJERCICIOS (página 149)
1.-



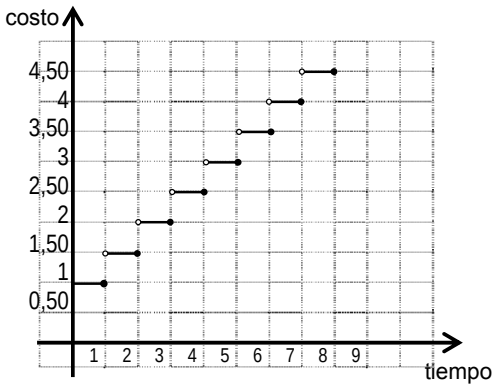
2.- a) V(3,4), $x = 3$, $y = -(x-3)^2 + 4$, **b)** V(-1,-3), $x = -1$, $y = -(x+1)^2 - 3$

3.- a) V(0,0), $x = 0$ **b)** V(-3,-6), $x = -3$, **c)** $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right)$, $x = -\frac{3}{2}$

PRACTICO: FUNCIONES (página 150)

1) I-(a) ; II-(c) ; III-(b)
2) a) v = e/t = 75 *km/h*.b) Se detiene durante una hora. c) Circula más lento, recorre 50 *km* en 1 hora. d) 175 kilómetros en 4 horas. e) No.
f) No. El colectivo a medida que transcurre el tiempo recorre más espacio.
3) a) Durante la primer hora viaja a 75 *km/h*. Durante la segunda hora se detiene o está dando vueltas a igual distancia de la terminal. Durante la tercer hora recorre 125 kilómetros.
b) Inicia el viaje de regreso.
c) El colectivo se está acercando a la terminal.
d) Porque la variable dependiente en el ejercicio 2 mide los kilómetros recorridos desde que sale de la terminal. En este problema mide la distancia entre el colectivo y la terminal.
e) El punto máximo (175 *km*) en este gráfico es el punto más distante al que llega el colectivo. E l mínimo (0) indica la salida, y la llegada.
f) No. Puede estar detenido o dando vueltas a igual distancia de la terminal.

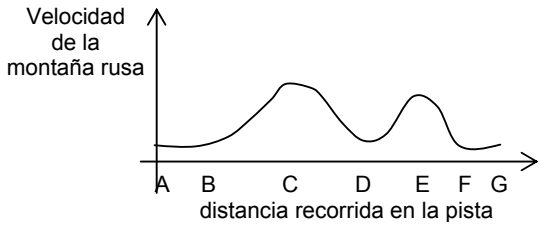
4)



Debo pagar $4,50 si estaciono por 8 horas.

5) Salen. C toma el primer puesto, B va a su ritmo, más tranquilo, A corre más rápido en los primero 150 metros. Pero C deja de correr, no sabemos que le pasó, quizás se le desató la zapatilla.. Se detiene unos segundos. A y B pasan a C.
Luego, C empieza a correr de nuevo. C corre a menos velocidad que los otros. B acelera, supera a A cuando falta poco para la llegada. B gana la carrera. A termina segundo y C termina último.

6)



Observar que la gráfica parece un retrato invertido de la pista.
La velocidad crece en los tramos de la bajada en la montaña , por ejemplo de B a C aumenta la velocidad, también de D a E.

7) (a) No es función, un punto del dominio tiene dos imágenes. (b) Si. (c) Si.
(d) Si es función. (e) No. Infinitos x tienen dos imágenes. Se puede verificar trazando una recta vertical. (f) No. Un valor de x tiene infinitas imágenes. (g) Si. Es una función constante.

8) $P(1) = 30 - \frac{6}{2} = 27\,mil$. El número tenderá a estabilizarse en 30 mil habitantes.

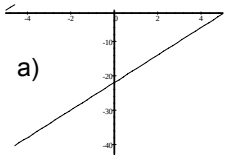
9) a) $q(0) = 700 - 400 \cdot 2^{(-0.7)0} = 700 - 400 = 300$ b) $q(6) = 700 - 400 \cdot 2^{(-0.7)6} \cong 678$
c) El número de se aproximará a 700 cartas por hora.

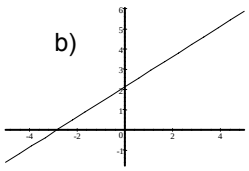
10) $q(0) = -\frac{20}{1+19 \cdot 2^0} = 1$ 1000 personas tenían la enfermedad cuando comenzó el brote. Al final de la segunda semana: $q(2) \cong 3.478$ personas.

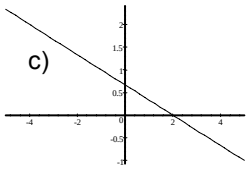
11) a) La curva muestra estabilidad de la variable antes de 1946 y después de 1948 muestra crecimiento. b) La población crece. c) en 1000. d) En el período 1946-1948 comenzó a bajar la tasa de mortalidad. La de nacimientos se mantuvo estable. e) La natalidad es una variable estable, la mortalidad disminuyó a partir de 1946, esta diferencia dio origen a aumento de la población a partir de 1950.

12) (a) pendiente = 3; (b) pendiente = $-\frac{2}{3}$ **13)** (a) $m = \frac{1}{5}$; $b = 4$ (b) $m = 0$; $b = -1$ (c) $m = -\frac{1}{3}$; $b = 2$

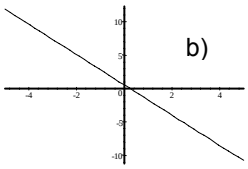
(d) $m = -3$; $b = -4$ (e) m no está definida; no hay intersección con el eje y. **14)** a) y = 4x –22
b) $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{8}$ c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

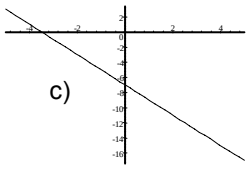






15) a) y = -x b) $y = -\frac{34}{15}x + \frac{8}{15}$ c) y = -2x -7 d) $y = -\frac{11}{14}x - \frac{27}{14}$





16) a) $(2, -\frac{18}{5})$ b) (2,-1) c) $(2, \frac{4}{3})$ **17)** a) $x + 3y = 3$ b) $2x - y = -2$ c) $-3x - 2y = 6$ d) $x + 12y = 12$ **18)** a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

b) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **19)** (b) **20)** 5F-9C-160 = 0 ; 72ºF ≈22,2ºC

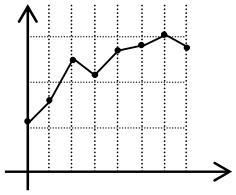
21)

tiempo (horas)	1	2	3	....	x
costo(pesos)	3 + 0,8	3 + 0,8.2	3 + 0,8.3	.....	3 + 0,8.x

El costo en función del tiempo se obtiene mediante la ecuación y = 3 + 0,8 x.
Debe pagar $5 por alquilar 2 horas y media.
Dominio: los números reales mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 12.
Imagen: los números reales mayores o iguales que 3 y menores o iguales que 12,6.

22) $d = 1100 - 90t$ **23)** (a) $D(p) = \frac{1330 - p}{15}$, (b) $D(655) = 45$ (c) $D(595) = 49$

24) (a)



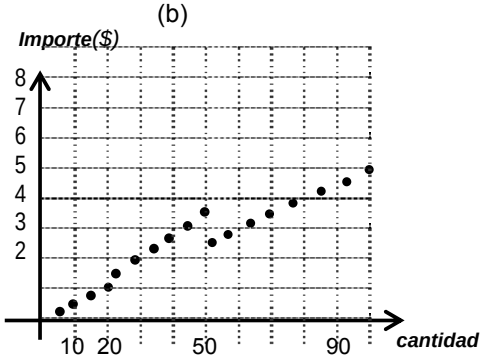
(b) Decrece más rápidamente en el período 1992-1993.
Crece más rápidamente en el período 1991-1992

25)
(a)

cantidad	10	21	50	51	70
precio en pesos	$1	$1,47	$3,50	$2,55	$3,50

(c) Tener en cuenta que el dominio de esta función es discreto, es el conjunto de los números naturales. $f(x) = \begin{cases} 0{,}10x & si\ \ x \in N \text{ y } x \le 20 \\ 0{,}07x & si\ \ x \in N \text{ y } 21 \le x \le 50 \\ 0{,}05x & si\ \ x \in N \text{ y } x \ge 51 \end{cases}$

(b)



26) (a) x = 2, y = 1 (b) x = 5, y = 3 (c) $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{6}$ (d) Con infinitas soluciones, rectas coincidentes (e) Sistema inconsistente, rectas paralelas.

27)

a) La función costo total es $C(x) = 750 + 6x$.

b) La función ingreso por la venta de cada juguete: $I(x) = 11x$

c) Para determinar el punto de beneficio nulo se deben igualar las dos ecuaciones anteriores $750 + 6x = 11x$, despejando x se obtiene x = 15. O sea el fabricante debe vender 15 juguetes para no tener ni pérdidas ni ganancias.

d) para el lector

e)Si vende 100 unidades pierde 250 pesos.

f) $11x - (750 + 6x) = 200$ Luego debe vender 190 juguetes.

28)

a) 4 kilos y medio cuestan $5,85 y 5 kilos y medio, cuestan $4,95.

b) Con \$6 conviene comprar más de 6 kilos y medio. También se puede pedir 4 kilos con 600 gramos, en ese caso el verdulero aplicará el precio de \$1,30 por kilo.
c) Hasta 7 kilos con 222 gramos.
d) Con \$4,70 conviene pedir 5 kilos con 200gramos.
e) El verdulero espera que los compradores no se percaten que no les conviene pedir entre 3 kilos 460 gramos y 5 kilos, ya que con el mismo dinero pueden comprar más de 5 kilos..

29) (a) $f(-2) = 1$; $f(t+1) = 3t + 10$; $f(-2+h) = 1 + 3h$; $f(\frac{3}{2}) = 11{,}5$; $f(\frac{1}{t}) = \frac{3}{t} + 7$ (b) $f(-2) = 3$; $f(t+1) = t^2 + 2t$;

$f(-2+h) = 3-4h + h^2$; $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$; $f(\frac{1}{t}) = \frac{1-t^2}{t^2}$ (c) $f(-2) = 3$; $f(t+1) = -t^2-3t + 3$; $f(-2+h) = 3 + 3h-h^2$;

$f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$; $f(\frac{1}{t}) = \frac{1-t+5t^2}{t^2}$ (d) $f(-2) = 6$; $f(t+1) = 6$; $f(-2+h) = 6$; $f(\frac{3}{2}) = 6$; $f(\frac{1}{t}) = 6$

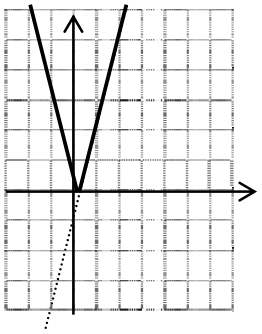
30)
a)

$$f(x) = \begin{cases} 500x & \text{si} \quad 0 < x < 30 \\ x[500 - (x-30)5] = x(650 - 5x) & \text{si} \quad 30 \le x \le 60 \\ 350x & \text{si} \quad x > 60 \end{cases}$$

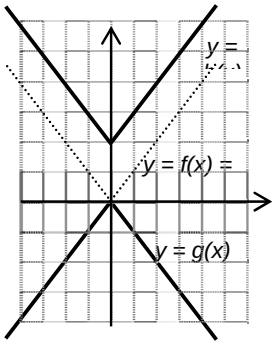
b) grupo de 50:\$20.000; grupo de 25:\$12.500.

31)

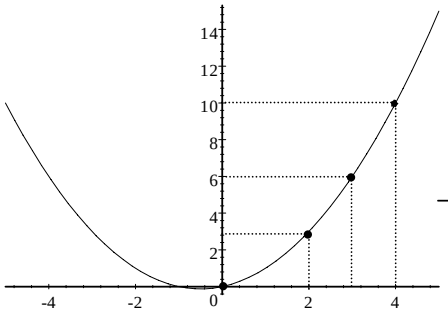
(a)



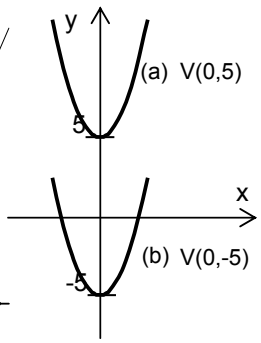
(b)

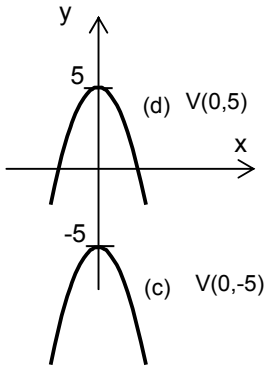


32)

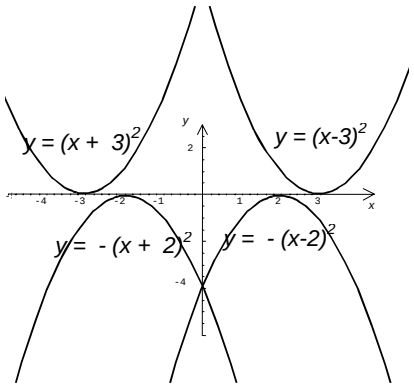


33)





34)



(a) V(3,0) ; (b) V(-3,0) ; (c) V(2,0) ; (d) V(-2,0)

35) (a) $y = (x-1)^2 + 4$ (b) $y = (x+5)^2 + 3$ (c) $y = (x+3)^2 - 6$ **36)** (a) V(0,5) gráfico de igual forma que $4x^2$; a = 4.
(b) V(2,0) gráfico de igual forma que $-2x^2$; a = -2. (c) V(-1,-3) gráfico de igual forma que x^2; a = 1.

37) (a) $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$; (b) $y = 2(x-2)^2 + 3$; eje de simetría: x = 2. **38)** (a) V(1,4); eje de simetría: x = 1; corte con eje y: (0,5); no corta al eje x. (b) V(-2,3); eje de simetría: x = -2; corte con eje y: (0,-1); cortes con eje x:
$x_1 = -2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -2 - 3$. (c) V(-1,-5); eje de simetría: x = -1; corte con eje y: (0,-4); cortes con eje x: $x_1 = -1 + \sqrt{5}$ y
$x_2 = -1 - \sqrt{5}$. **39)** (a) No corta al eje x. (b) $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}$ y $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$. (c) $x_1 = 4$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

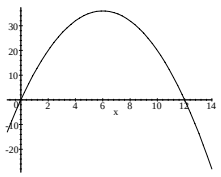
40) $\Delta = 4h^2 - 4$, $\Delta = 0$ para $h = \pm 1$; $\Delta > 0$ si $|h| > 1$; $\Delta < 0$ si $|h| < 1$ **41)** a = 2 y h = 3 ; a = $\frac{2}{9}$; h = -1.

42) (a) **1**, a<0; **2**, a>0; **3**, a>0; **4**, a<0; **5**, a<0; **6**, a>0;
(b) **1**, c<0; **2**, c>0; **3**, c<0; **4**, c<0; **5**, c<0; **6**, c>0;
(c) **1**, $\Delta > 0$; **2**, $\Delta < 0$; **3**, $\Delta > 0$; **4**, $\Delta > 0$; **5**, $\Delta < 0$; **6**, $\Delta > 0$;

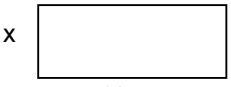
43) a = -16, parábola cóncava hacia abajo, máximo se alcanza en el vértice. Por lo tanto en el instante t = $\frac{3}{2}$ se alcanza el máximo. Máxima altura = s($\frac{3}{2}$) = 36 pies. **44)** V(-3,0), corta al eje y en (0, $-\frac{9}{2}$). Ecuación $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2$.

45)a) Si no vende ningún litro de nafta es x = 0, entonces pierde 205 pesos.
b) La ordenada del vértice corresponde al máximo. Ganancia de 324 pesos, por vender 23 mil litros.
c) Con 5000 litros o con 41.000 litros.
d) Hay ganancia cuando la función beneficio es positiva. Corresponde a los valores comprendidos entre 5000 y 41.000.

46)
a) A(x) = x(12-x).
b) Dominio los números reales entre 0 y 12, Valores positivos de la función.



c) El área máxima se produce para x = 6. Se obtiene un cuadrado de lado 6, largo = ancho.



47) a) Producción: 400x 60. Rendimiento cuando planta x nuevos árboles: 400-4x.
Luego la producción total $P(x) = (60 + x)(400 - 4x)$

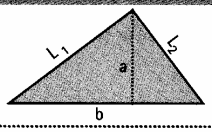
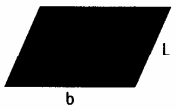
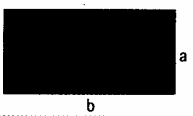
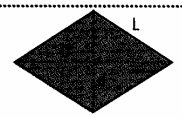
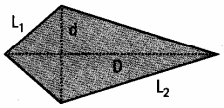
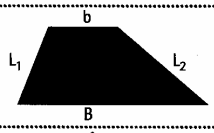
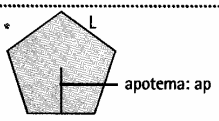
b) El máximo de producción se alcanza con 80 árboles. Corresponde a la absisa del vértice de la función cuadrática $P(x)$. Observar que la función tiene dominio discreto, cada x es un número natural.

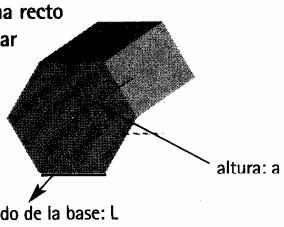
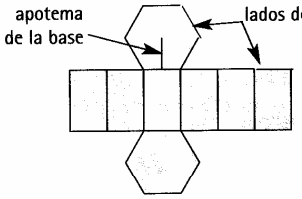
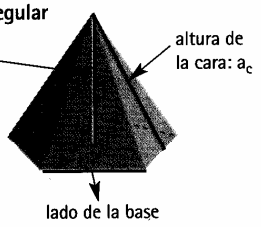
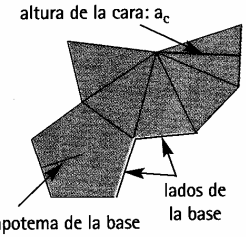
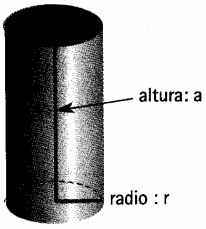
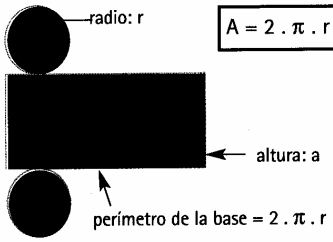
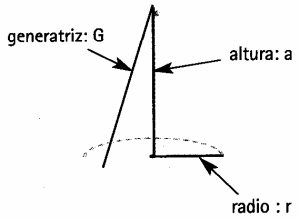
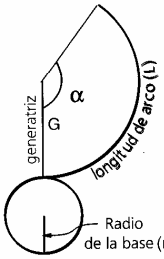
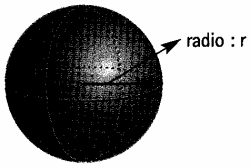
48) Observando la gráfica, después de 2 segundos la piedra se encuentra a 30 metros de altura. Además f(0) = 50, por lo tanto la fórmula: $f(t) = 50 - 5t^2$. La piedra toca el suelo cuando $t = \sqrt{10}$.

Fe de Erratas

Página	Línea	Dice:	Debe decir:
98	25	$\frac{\overline{CF}}{5} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{20}{6}$ $\Rightarrow \overline{CF} = \frac{10}{3}$	$\frac{\overline{CE}}{5} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{20}{6} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{10}{3}$
106	21	g^2	e^2
116	10	β	α_2

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES

FIGURA	PERÍMETRO	ÁREA
Triángulo 	$b + L_1 + L_2$	$\frac{b \cdot a}{2}$
Paralelogramo 	$2 \cdot (b + L)$	$b \cdot a$
Rectángulo 	$2 \cdot (b + a)$	$b \cdot a$
Cuadrado	$4 \cdot L$	L^2
Rombo 	$4 \cdot L$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Romboide 	$2 \cdot (L_1 + L_2)$	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio 	$B + b + L_1 + L_2$	$\frac{(B + b) \cdot a}{2}$
Polígono regular de n lados 	$n \cdot L$	$\frac{n \cdot L \cdot ap}{2}$
Círculo	$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$
Corona circular	$2 \cdot \pi \cdot (R + r)$	$\pi \cdot (R^2 - r^2)$
Sector circular	$\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ} + 2 \cdot r$	$\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ}$

CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
Prisma recto regular  	 $A_L = n \cdot L \cdot a$ n: cantidad de lados $A = A_L + 2 \cdot A_B$	$A_B \cdot a$
Pirámide regular  	 n: cantidad de lados $A_L = n \cdot \frac{\ell}{2} a_c = \frac{P \cdot a_c}{2}$ $A = A_L + A_B$	$\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot a$
Cilindro circular recto  	 $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot a + 2 \cdot \pi \cdot r^2$	$\pi \cdot r^2 \cdot a$
Cono circular recto  	 $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ}$ $A_{sc} = \frac{L \cdot G}{2}$ $A_B = \pi \cdot r^2$ $A = A_{sc} + A_B$	$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot a$
Esfera  	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Anexo

Modelos de Exámenes de Ingreso

29 de Noviembre de 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y NATURALES
INGRESO 2019
Primera Evaluación Diagnóstica de Matemática

Apellido/s y Nombres (claro, legible y como está registrado):

.....

Tipo y Nº de Documento:

….....

Carrera/s en la/s que se inscribió:

.....

Escuela de la que egresó: .....:

Especialidad o Modalidad: .....

Año de egreso:.....

Ciudad: ..... Provincia: .....

INSTRUCCIONES

Escriba con letra imprenta los datos solicitados en la primera hoja y en la hoja de respuestas. **No usar lápiz**.

Puede usar calculadora pero es individual, no puede pedirla ni prestarla. **Está prohibido el uso de celulares**.

La prueba consta de 17 (dicisiete) preguntas de opción múltiple.

Cada una de las preguntas tiene 4 alternativas de respuesta, de las cuales **sólo una** es correcta. **Señale su elección con una X (cruz) en el centro del casillero correspondiente** en la HOJA de RESPUESTAS. **NO usar lápiz para marcar la X.**

Preguntas con **más de una** alternativa señalada serán consideradas **nulas**.

Si tiene alguna duda relativa a la impresión, consulte al docente que se encuentra en la sala, para lo cual deberá levantar la mano y esperar ser atendido. **No** se contestarán preguntas referentes a la resolución de ejercicios ni interpretación de enunciados.

La prueba es individual, observe esta disposición para evitar que se le retiren las hojas.

Tiene dos horas para realizar el examen.

En la última hoja puede anotar sus respuestas y llevársela para controlar las mismas.

29 de Noviembre de 2018

1) Cuando $x = -\frac{5}{8}$, la expresión $\sqrt{(-5.\ x^{-1}) \div \left(x - \frac{3}{8}\right)^2}$ da como resultado:

A) 8

B) $2\sqrt{2}$

C) Un racional no entero

D) $\sqrt{\frac{1}{8}}$

---

2) En una tienda, por la compra de un producto me rebajaron el 20% y pagué $96 por él.
¿Cuánto costaba el producto?

A) $128

B) $76,8

C) $115,2

D) $120

---

3) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA?**

A) $\left(\sqrt{6} + \sqrt{10}\right)$ es un número racional.

B) $\left(\sqrt{2}\,.\sqrt{8}\right)$ es un número irracional

C) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{20}\right)^2$ es un número racional.

D) $\frac{\frac{\sqrt{5}}{7}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ es un número irracional.

---

4) Al resolver la ecuación $\frac{25-w}{5} = -2w + 5$ se obtiene que:

A) No tiene solución en $\mathbb{R}$

B) Todos los números reales excepto el 0 (cero) satisfacen dicha ecuación.

C) $x = 0$ es solución única de la ecuación

D) La ecuación tiene infinitas soluciones.

---

5) Dada la ecuación $x^2 + ax + 14 = 0$ y sabiendo que una de sus raíces es $x_1 = 2$, hallar la otra raíz x_2 y el valor de a

A) $x_2 = 7$ y $a = -9$

B) $x_2 = 2$ y $a = 7$

C) $x_2 = -7$ y $a = 2$

D) $x_2 = 7$ y $a = -18$

---

29 de Noviembre de 2018

6) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, marcar la opción correcta:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 1 \\ 3y - x = -2 \end{cases}$$

A) El Sistema tiene como única solución a $(x_0, y_0) = (2, 0)$

B) Es un Sistema Compatible Indeterminado

C) Es un Sistema Compatible Determinado

D) Es un Sistema Incompatible

---

7) La edad de Gabriel es la tercera parte de la edad de Pedro. Dentro de 15 años, la edad de Pedro será el doble de la de Gabriel disminuida en 3 años. De los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál determina las edades de Gabriel y Pedro?

A) $\begin{cases} G = \frac{P}{3} \\ P + 15 = 2G - 3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} G = 3P \\ P + 15 = 2(G - 3) \end{cases}$

C) $\begin{cases} G = \frac{1}{3}P \\ P = 2(G + 15) - 3 \end{cases}$

D) Ninguna de las anteriores

---

8) Si al dividir el polinomio $3x^4 - 5ax^3 - 7x^2 - 1$ por $x + 1$ obtenemos un resto de 10, entonces a vale:

A) 3 **B)** 1 **C)** $-\frac{21}{5}$ **D)** -3

---

9) Sabiendo que una de las raíces del polinomio $x^3 - 3x^2 - x + k$ es 1, entonces las otras dos raíces son:

A) -1 y 2 **B)** -1 y 3 **C)** 2 y 3 **D)** -1 y 0

---

10) Dado el polinomio $P(x) = (x + 2)^2(x - 1)(-5)$, determinar cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA:**

A) El polinomio $P(x)$ es de grado 3, sus raíces son 2, -1 y el coeficiente principal es 1

B) El polinomio $P(x)$ es de grado 2, sus raíces son 2, -1 y el coeficiente principal es -5

C) El polinomio $P(x)$ es de grado 3, sus raíces son -2, 1 y el coeficiente principal es -5

D) El polinomio $P(x)$ es de grado 2, sus raíces son -2, 1 y el coeficiente principal es -1

---

29 de Noviembre de 2018

11) La expresión factorizada del polinomio $Q(x) = 7x^2 - 28x + 28$ es:

A) $Q(x) = 2(x-7)^3$ **C)** $Q(x) = x(x-7)$

B) $Q(x) = 7(x-2)^2$ **D)** Ninguna de las anteriores

---

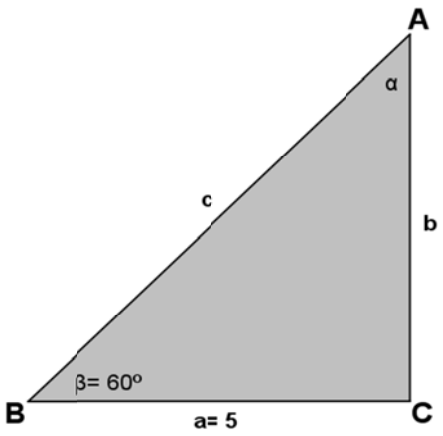
12) En un triángulo equilátero la altura mide 15 cm, ¿cuánto miden los lados?

A) 2,4 cm **C)** $10\sqrt{3}$ cm

B) $5\sqrt{3}$ cm **D)** 6 cm

---

13) Resolver siguiente el triángulo rectángulo, usando la información dada en el dibujo.



---

14) Sea ABC un triángulo rectángulo en A, tal que $\overline{AB} = 4\ cm$ y $\overline{AC} = 3\ cm$. Si A, B y C son los ángulos, calcular $tg\ B$ y $tg\ C$

A) $tg\ B = \frac{4}{3}$ y $tg\ C = \frac{3}{4}$

B) $tg\ B = \frac{3}{5}$ y $tg\ C = \frac{5}{3}$

C) $tg\ B = \frac{3}{4}$ y $tg\ C = \frac{4}{3}$

D) $tg\ B = \frac{5}{3}$ y $tg\ C = \frac{3}{5}$

---

29 de Noviembre de 2018

15) Un cierto día de primavera, un edificio proyectó una sombra de 27 m de largo y el ángulo de elevación del sol fue de 75º ¿Cuál de las siguientes opciones es la que más se aproxima a la altura del edificio?

A) 69 m

B) 100 m

C) 26 m

D) 110 m

---

16) Sea r la recta que pasa por los puntos $R(4,6)$ y $S(3,3)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es paralela a r y pasa por el punto $A(0,2)$?

A) $y = 3x + 2$

B) $y = \frac{1}{3}x + 2$

C) $y = 3x - 6$

D) $y = x + 6$

---

17) ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde al vértice (V), raíces $(x_1\ y\ x_2)$, intersección con el eje y y ecuación del eje de simetría de la parábola de ecuación $y = -2x^2 - 6x + 8$?

A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right)$
Raíces: $x_1 = -1\ y\ x_2 = 4$
Corte con el eje y: 8
Eje de simetría: $x = 2$

B) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right)$
Raíces: $x_1 = 1\ y\ x_2 = -4$
Corte con el eje y: -8
Eje de simetría: $x = 1{,}5$

C) $\left(\frac{3}{2}, 12\right)$
Raíces: $x_1 = -1\ y\ x_2 = -4$
Corte con el eje y: 8
Eje de simetría: $x = -2$

D) $\left(-\frac{3}{2},\ 12{,}5\right)$
Raíces: $x_1 = 1\ y\ x_2 = -4$
Corte con el eje y: 8
Eje de simetría: $x = -1{,}5$

29 de Noviembre de 2018

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR:

Resuelva los siguientes ejercicios, detallando todos los procedimientos y cálculos realizados. Sea prolijo en dicho desarrollo

1) Un comerciante adquirió banderines para vender en el transcurso de un torneo deportivo que se realizará en dos jornadas.

El primer día vendió tres cuartas partes de lo que tenía. El segundo día vendió dos décimos de lo que le quedaba, y le sobraron 35 banderines. ¿Cuál fue el número total de banderines?

2) Hallar el o los valores de a de tal manera que la ecuación $a(2x+1)-(a-1)(x-1)=(a+9)(x-3)$, tenga como solución $x=-7$

3) Hallar el valor de k para que el sistema de ecuaciones tenga la solución $(x_0, y_0)=\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x-16ky+5=0 \\ 2kx+y=2 \end{cases}$$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

29 de Noviembre de 2018

29 de Noviembre de 2018

HOJA DE RESPUESTAS

Apellido y Nombres:.....

D.N.I N°: .....**Carrera:**……..

Calificación

RESPUESTAS				
1	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
2	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
3	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
4	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
5	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
6	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
7	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
8	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
9	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
10	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
11	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
12	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
13	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
14	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
15	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
16	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
17	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**

29 de Noviembre de 2018

Anote sus respuestas en esta hoja, luego al entregar la prueba la desprende y la lleva para controlar sus respuestas con las correctas que se publiquen.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	

Publicaciones en la página web de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales y en la cartelera del Boque II.
Resultados en la página el ……
Lista de aprobados……

10 de Diciembre de 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y NATURALES
INGRESO 2019
Recuperación de la Primera Evaluación Diagnóstica de Matemática

Apellido/s y Nombres (claro, legible y como está registrado):

.....

Tipo y Nº de Documento:

….....

Carrera/s en la/s que se inscribió:

.....

Escuela de la que egresó: .....:

Especialidad o Modalidad: .....

Año de egreso:.....

Ciudad: ..... Provincia: .....

INSTRUCCIONES

Escriba con letra imprenta los datos solicitados en la primera hoja y en la hoja de respuestas. **No usar lápiz**.

Puede usar calculadora pero es individual, no puede pedirla ni prestarla. **Está prohibido el uso de celulares**.

La prueba consta de 17 (diecisiete) preguntas de opción múltiple.

Cada una de las preguntas tiene 4 alternativas de respuesta, de las cuales **sólo una** es correcta. **Señale su elección con una X (cruz) en el centro del casillero correspondiente** en la HOJA de RESPUESTAS. **NO usar lápiz para marcar la X.**

Preguntas con **más de una** alternativa señalada serán consideradas **nulas**.

Si tiene alguna duda relativa a la impresión, consulte al docente que se encuentra en la sala, para lo cual deberá levantar la mano y esperar ser atendido. **No** se contestarán preguntas referentes a la resolución de ejercicios ni interpretación de enunciados.

La prueba es individual, observe esta disposición para evitar que se le retiren las hojas.

Tiene dos horas para realizar el examen.

En la última hoja puede anotar sus respuestas y llevársela para controlar las mismas.

10 de Diciembre de 2018

1) El resultado de $\dfrac{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$ es:

A) $\frac{5}{8}$ **B)** 0 **C)** 1 **D)** -2

---

2) Una epidemia ha hecho descender la población de una granja avícola en un 12%. Actualmente quedan 3344 gallinas. ¿Cuántas habían al principio?

A) 3800 **C)** 6287

B) 27867 **D)** 3745

---

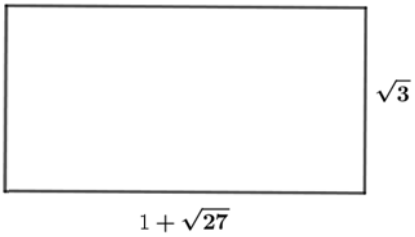
3) El perímetro del rectángulo de la figura es:

A) $1+\sqrt{30}$

B) $2\left(1+\sqrt{30}\right)$

C) $10\sqrt{3}$

D) $2+8\sqrt{3}$



---

4) ¿Cuál de las siguientes opciones indica el valor de a de tal manera que la ecuación $\frac{m(1+a)}{a}+1=a-1$ tenga como solución $m=-\frac{1}{2}$?

A) $a_1=1\ y\ a_2=1{,}5$ **C)** $a_1=1\ y\ a_2=\frac{1}{2}$

B) $a_1=-1\ y\ a_2=\frac{3}{2}$ **D)** $a_1=\ a_2=1$

---

5) Dada la ecuación $\frac{p-3}{2}-\frac{(p-2)^2}{2p}+\frac{3}{2}=0$ ¿cuál de las siguientes opciones es su solución?

A) $p=0$ **C)** $p=-1$

B) $p=1$ **D)** No tiene solución

---

6) ¿Para qué valor o valores de k la ecuación $kx^2-2kx+1=0$ admite raíces iguales?

A) $k_1=0\ y\ k_2=1$ **C)** $k_1=0\ y\ k_2=-1$

B) $k=-1$ **D)** $k=0$

10 de Diciembre de 2018

7) Al factorizar y simplificar la expresión $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$ se obtiene:

A) $\frac{x}{x+y}$ **B)** $\frac{x-y}{x+y}$ **C)** $-\frac{2xy}{x-y}$ **D)** $-\frac{2}{x-y}$

---

8) Sean $P(x)=x^2+2x-1$ y $Q(x)=x^2-4x+3$ polinomios ¿Cuál de los siguientes términos no pertenece al producto $P(x).Q(x)$?

A) x^4 **B)** $-6x^2$ **C)** $2x^3$ **D)** $10x$

---

9) Sabiendo que una de las raíces del polinomio $T(x)=x^2+4x+k$ es -9 , la otra raíz es:

A) 5 **B)** 0 **C)** -1 **D)** 9

---

10) Dado el polinomio $P(x)=2x(x-1)(x+3)(x-5)$, determinar cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA:**

A) El polinomio $P(x)$ es de grado 3, sus raíces son 1, -3, 5 y 0 y el coeficiente principal es 2

B) El polinomio $P(x)$ es de grado 2, sus raíces son -1, 3 y 5 y el coeficiente principal es 0

C) El polinomio $P(x)$ es de grado 2, sus raíces son -1, 3 y 5 y el coeficiente principal es 1

D) El polinomio $P(x)$ es de grado 4, sus raíces son 1, -3, 5 y 0 y el coeficiente principal es 2

---

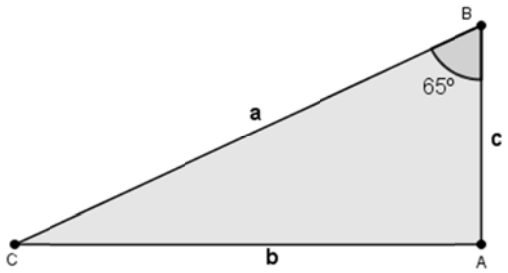
11) En el siguiente triángulo el valor del lado c se obtiene por la expresión

A) $c=\frac{b}{tan\,25^\circ}$

B) $c=a.tan\,25^\circ$

C) $c=\frac{b}{cos65^\circ}$

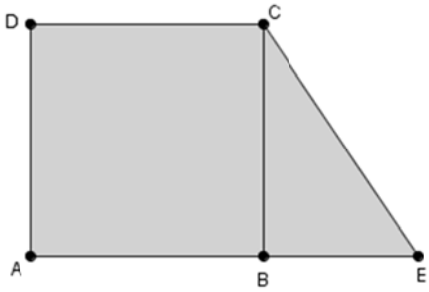
D) $c=a.cos65^\circ$



---

12) El área del cuadrilátero $AECD$ es de $30m^2$. El área del triángulo BEC es $\frac{2}{3}$ del área del cuadrado $ABCD$.

¿Cuál de las siguientes opciones indica la longitud de los lados de $ABCD$?



13) Sabiendo que un edificio mide $350m$, ¿cuánto hay que alejarse para que su terraza se vea, desde el suelo, 40° por encima de la horizontal aproximadamente?

A) 293,6 m **C)** 2,39 m

B) 417 m **D)** 4,17 m

---

14) El gráfico de la función lineal que pasa por el punto (4, 2) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, también pasa por el punto:

A) $(1, 1)$ **B)** $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ **C)** $(0, -3)$ **D)** $\left(\frac{2}{3}, -\frac{17}{6}\right)$

---

15) Se sabe que las rectas t y s son perpendiculares y su punto de intersección es (3, 0). Si s: $y = 2 - \frac{2}{3}x$ entonces la ecuación de la recta t es:

A) t: $y = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x$ **C)** t: $y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x$

B) t: $y = -\frac{9}{2} - \frac{2}{3}x$ **D)** t: $y = 2 - \frac{2}{3}x$

---

16) Una parábola tiene vértice en el punto $V(-1, -2)$ y corta al eje y en el punto (0, 5) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA?**

A) El punto (1, 2) pertenece a la parábola

B) La función no tiene raíces reales

C) El punto (-2, 5) pertenece a la parábola

D) El coeficiente principal de la función es negativo

---

17) Un proyectil es lanzado desde el piso. La altura h (expresada en metros) que alcanzará el proyectil transcurridos t segundos, está dada por la fórmula $h(t) = 100t - 5t^2$. El tiempo en que el proyectil se encontrará a 420 metros de altura sobre el nivel del suelo, es:

A) Sólo a los 6 segundos **C)** Sólo a los 14 segundos

B) A los 6 y a los 14 segundos **D)** A los 2 y a los 9 segundos

10 de Diciembre de 2018

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR:

Resuelva los siguientes ejercicios, detallando todos los procedimientos y cálculos realizados. Sea prolijo en dicho desarrollo

1) ¿Cuál es la longitud de una varilla si su sexta parte es roja, hay dos quintos del resto pintados de blanco y quedan aún dos metros sin pintar?

2) Resolver la ecuación $\frac{2-4x}{3}+\frac{4}{6}=-\left(\frac{x}{4}-5\right)$ y verificarla

3) Hace 10 años, las edades de Juan y Diego sumaban 36 años. Ahora Juan tiene el triple de la edad de Diego ¿cuál es la edad de cada uno?

10 de Diciembre de 2018

10 de Diciembre de 2018

HOJA DE RESPUESTAS

Apellido y Nombres:.....

D.N.I N°: .....**Carrera:**……..

Calificación

RESPUESTAS				
1	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
2	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
3	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
4	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
5	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
6	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
7	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
8	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
9	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
10	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
11	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
12	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
13	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
14	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
15	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
16	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**
17	**A)**	**B)**	**C)**	**D)**

10 de Diciembre de 2018

Anote sus respuestas en esta hoja, luego al entregar la prueba la desprende y la lleva para controlar sus respuestas con las correctas que se publiquen.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	

Publicaciones en la página web de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales, sección *"Ingresantes"- "Ingreso 2019"*

Resultados en la página el Lunes 10 de Diciembre a las 14:00 hs.

Lista de aprobados: Miércoles 12 de Diciembre a las 18:00 hs.