

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales



Guía Ingreso Matemática



Sitio: ingresofmn.unsl.edu.ar

Consultas: ingreso.fmn@gmail.com





ingresofmn.unsl.edu.ar

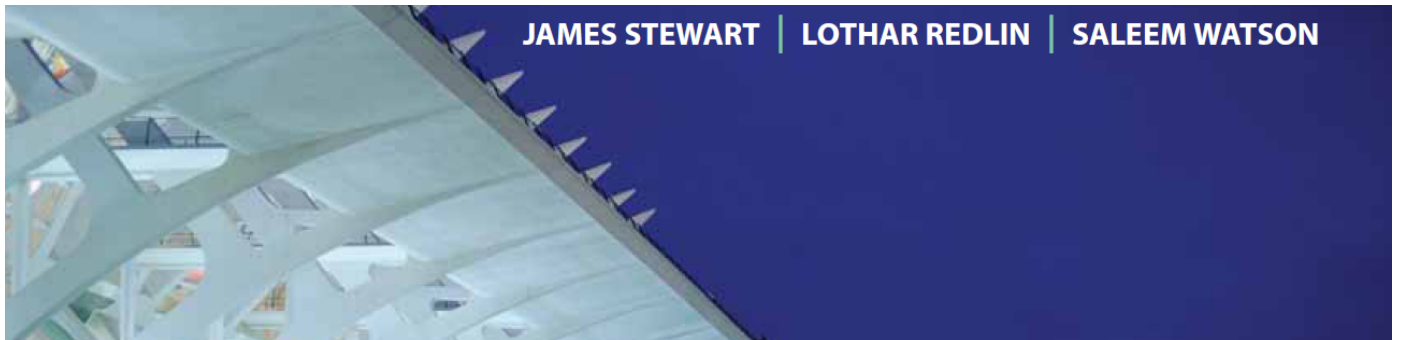


Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas y Naturales



CONTENIDO

- Conceptos Teóricos
- Ejercitación
- Apéndice



▼ Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$

(b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad \checkmark$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$\begin{aligned} 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \\ = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

(b) Observamos que

$8, 6$ y -2 tienen el máximo factor común 2

x^4, y^3 y x tienen el máximo factor común x

y^2, y^3 y y^4 tienen el máximo factor común y^2

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

(c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 61, 63 Y 65

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$


factores de 12

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

factores de a ↓ ↓
 ↑ ↑
 factores de c

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s .

EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y errorFactorice: $6x^2 + 7x - 5$ **SOLUCIÓN** Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

La multiplicación da

$$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5 \quad \checkmark$$

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de 6
factores de -5

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69****EJEMPLO 9** | Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

(a) $x^2 - 2x - 3$ (b) $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

(b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\square$ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la expresión de la parte (a), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$\begin{aligned} (5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 &= [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1] \\ &= (5a - 2)(5a + 2) \end{aligned}$$

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 71****▼ Fórmulas especiales de factorización**

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $(x + y)^2 - z^2$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Cambio de palabras, sonido e imágenes en números

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro por la Internet, aparatos de fax o módem. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse por cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia $A = 00000001$, $B = 00000010$, $C = 00000011$, $D = 00000100$, $E = 00000101$, y así sucesivamente. La palabra "BED" (CAMA) se convierte entonces en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra "BED".

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original puede reconstruirse a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como 101010001010010100101010100000101110101000101011.... (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits). El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillantez de cada punto (o píxel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como forma compacta de almacenar en archivo millones de huellas dactilares que necesitan.

SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

- (b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 75 Y 109

EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

- (a) $27x^3 - 1$ (b) $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

- (a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 &= (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

- (b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 77 Y 79

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{o} \quad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

- (a) $x^2 + 6x + 9$ (b) $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

- (a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

- (b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 105 Y 107

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ (b) $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned}
 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\
 &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados}
 \end{aligned}$$

(b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned}
 x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\
 &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \\
 &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados}
 \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 115 Y 117

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (b) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

SOLUCIÓN(a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}
 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\
 &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2
 \end{aligned}$$

(b) Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2 + x)^{-2/3}$

$$\begin{aligned}
 (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3} \\
 &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplifique} \\
 &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Factorice 2}
 \end{aligned}$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) &= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} && \checkmark \\
 \text{(b)} \quad (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] &= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} && \checkmark
 \end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 91 Y 93**▼ Factorización por agrupación de términos**

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Para factorizar $x^{-1/2}$ de $x^{3/2}$, restamos exponentes:

$$\begin{aligned}
 x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2 - (-1/2)}) \\
 &= x^{-1/2}(x^{3/2 + 1/2}) \\
 &= x^{-1/2}(x^2)
 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$

$$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x^2 + 4)(x + 1)$$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$

$$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$$

$$= (x^2 - 3)(x - 2)$$

Agrupe términos

Factorice factores comunes

Factorice $x + 1$ de cada término

Agrupe términos

Factorice factores comunes

Factorice $x - 2$ de cada término AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 83**1.3 EJERCICIOS****CONCEPTOS**

1. Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.
¿Cuántos términos tiene este polinomio? ____
Enliste los términos: ____
¿Cuál factor es común a cada término? ____
Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ ____.
2. Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$, buscamos dos enteros cuyo producto sea ____ y cuya suma sea ____.
Estos enteros son ____ y ____, de modo que el trinomio se factoriza como ____.
3. La fórmula de productos notables para la “suma de un cuadrado” es $(A + B)^2 =$ ____.
Por tanto, $(2x + 3)^2 =$ ____.
4. La fórmula de productos notables para la “suma y diferencia de los mismos términos” es $(A + B)(A - B) =$ ____.
Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ ____.
5. La fórmula de factorización especial para “la diferencia de cuadrados” es $A^2 - B^2 =$ _____. Entonces, $4x^2 - 25$ se factoriza como _____.
6. La fórmula de factorización especial para un “cuadrado perfecto” es $A^2 + 2AB + B^2 =$ _____. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como _____.

HABILIDADES

7-12 ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
7. $x^2 - 3x + 7$			
8. $2x^5 + 4x^2$			

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
9. -8			
10. $\frac{1}{2}x^7$			
11. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
12. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

13-22 ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

13. $(12x - 7) - (5x - 12)$ 14. $(5 - 3x) + (2x - 8)$

 15. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

 17. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23-28 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

 23. $(3t - 2)(7t - 4)$

24. $(4s - 1)(2s + 5)$

25. $(3x + 5)(2x - 1)$

26. $(7y - 3)(2y - 1)$

27. $(x + 3y)(2x - y)$

28. $(4x - 5y)(3x - y)$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

 29. $(3x + 4)^2$

30. $(1 - 2y)^2$

31. $(2u + v)^2$

32. $(x - 3y)^2$

33. $(2x + 3y)^2$

34. $(r - 2s)^2$

35. $(x + 5)(x - 5)$

36. $(y - 3)(y + 3)$

37. $(3x - 4)(3x + 4)$

38. $(2y + 5)(2y - 5)$

39. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

40. $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

41. $(y + 2)^3$ 42. $(x - 3)^3$
 43. $(1 - 2r)^3$ 44. $(3 + 2y)^3$
45-60 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.
 45. $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ 46. $(x + 1)(2x^2 - x + 1)$
 47. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ 48. $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$
 49. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ 50. $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$
 51. $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$ 52. $x^{1/4}(2x^{3/4} - x^{1/4})$
 53. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ 54. $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

55. $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$
 56. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$
 57. $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$
 58. $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$
 59. $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$ 60. $(x + y + z)(x - y - z)$

61-66 ■ Factorice el factor común.

61. $-2x^3 + 16x$ 62. $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$
 63. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ 64. $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$
 65. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ 66. $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

67. $x^2 + 2x - 3$ 68. $x^2 - 6x + 5$
 69. $8x^2 - 14x - 15$ 70. $6y^2 + 11y - 21$
 71. $3x^2 - 16x + 5$ 72. $5x^2 - 7x - 6$

73. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

74. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

75. $9a^2 - 16$ 76. $(x + 3)^2 - 4$
 77. $27x^3 + y^3$ 78. $a^3 - b^6$
 79. $8s^3 - 125t^3$ 80. $1 + 1000y^3$
 81. $x^2 + 12x + 36$ 82. $16z^2 - 24z + 9$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

83. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ 84. $3x^3 - x^2 + 6x - 2$
 85. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ 86. $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
 87. $x^3 + x^2 + x + 1$ 88. $x^5 + x^4 + x + 1$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

89. $x^{5/2} - x^{1/2}$ 90. $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$
 91. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$ 92. $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$
 93. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$
 94. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

95-124 ■ Factorice por completo la expresión.

95. $12x^3 + 18x$ 96. $30x^3 + 15x^4$
 97. $x^2 - 2x - 8$ 98. $x^2 - 14x + 48$

99. $2x^2 + 5x + 3$ 100. $2x^2 + 7x - 4$
 101. $9x^2 - 36x - 45$ 102. $8x^2 + 10x + 3$
 103. $49 - 4y^2$ 104. $4t^2 - 9s^2$
 105. $t^2 - 6t + 9$ 106. $x^2 + 10x + 25$
 107. $4x^2 + 4xy + y^2$ 108. $r^2 - 6rs + 9s^2$
 109. $(a + b)^2 - (a - b)^2$ 110. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$
 111. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$ 112. $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$
 113. $8x^3 - 125$ 114. $x^6 + 64$
 115. $x^3 + 2x^2 + x$ 116. $3x^3 - 27x$
 117. $x^4y^3 - x^2y^5$ 118. $18y^3x^2 - 2xy^4$
 119. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ 120. $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$
 121. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$
 122. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$
 123. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$
 124. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

125-128 ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “Regla del Producto”.)

125. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$
 126. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$
 127. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$
 128. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$
 129. (a) Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.
 (b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.
 (c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

(d) Factorice por completo: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

130. Verifique las fórmulas especiales de factorización 4 y 5 al expandir sus lados derechos.

APLICACIONES

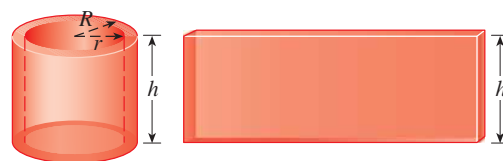
- 131. Volumen de concreto** Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama “desenrollado” para explicar por qué esto tiene sentido geoméricamente hablando.



Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	
$\frac{a+b}{a} \neq b$	
$(a^3 + b^3)^{1/3} \neq a + b$	
$a^m / a^n \neq a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \neq \frac{1}{a^n}$	

106. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su “forma” siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \quad (1+x)\left(1 + \frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para A y B , la primera tiene la forma $A + B$, la segunda AB , la tercera A/B y la cuarta $A^{1/2}$. Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

(a) $x + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ (b) $(1+x^2)(1+x)^3$

(c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ (d) $\frac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 ECUACIONES

Solución de ecuaciones lineales ► Solución de ecuaciones cuadráticas ► Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$$x = 3$$

$$4(3) + 7 = 19 \quad \checkmark$$

la letra x es la variable. Consideramos x como la “incógnita” de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación**.

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo “igual”. A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A , B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa “es equivalente a”.)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad

1. $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$

2. $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$

Descripción

Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.

Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos “*sume -7*” al resolver una ecuación, es una forma breve de decir “*sume -7 a cada lado de la ecuación*”.

▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales

$$4x - 5 = 3$$

$$2x = \frac{1}{2}x - 7$$

$$x - 6 = \frac{x}{3}$$

Ecuaciones no lineales

$$x^2 + 2x = 8$$

$$\sqrt{x} - 6x = 0$$

$$\frac{3}{x} - 2x = 1$$

No lineal; contiene el cuadrado de la variable

No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable

No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8$$

Ecuación dada

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$$

Sume 4

$$7x = 3x + 12$$

Simplifique

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$$

Reste $3x$

$$4x = 12$$

Simplifique

$$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$$

Multiplique por $\frac{1}{4}$

$$x = 3$$

Simplifique

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$x = 3:$$

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 7(3) - 4 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LD} &= 3(3) + 8 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad \checkmark$$

Debido a que es importante **VERIFICAR SU RESPUESTA**, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir “lado izquierdo” y LD es “lado derecho” de la ecuación original.

✏ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están a una distancia r entre sí. La constante G es la constante universal de gravitación.

EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje M de la ecuación siguiente.

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar M en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2} \right) M \quad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm} \right) F = \left(\frac{r^2}{Gm} \right) \left(\frac{Gm}{r^2} \right) M \quad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2 F}{Gm} = M \quad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \frac{r^2 F}{Gm}$.

✍ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

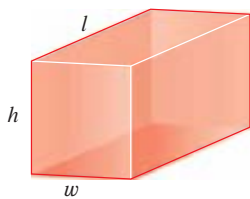


FIGURA 1 Una caja rectangular cerrada

EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial A del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud l , el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje w en términos de las otras variables de esta ecuación.

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar w en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \quad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \quad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \quad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \quad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \frac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

✍ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

▼ Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$3x + 10 = 4x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$



Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. **Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.**

EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \quad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \quad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -8 \quad \text{Resuelva}$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24 \quad \checkmark$$

$x = -8$:

$$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24 \quad \checkmark$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

¿Ve usted por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el Ejemplo 4? Factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no nos ayuda a encontrar soluciones, porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $(-\frac{2}{5}) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ (b) $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \quad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \quad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 51 Y 53

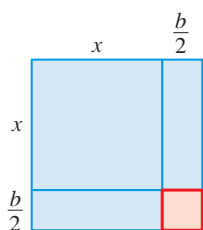
En la página 30 vea cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

Completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Suma un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para “completar” el cuadrado.



❗ Cuando complete el cuadrado, asegúrese que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan x :

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

A continuación complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por a .

Como vimos en el Ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x . Por lo tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado**. Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto, debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x . Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ (b) $3x^2 - 12x + 6 = 0$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$

Ecuación dada

$$x^2 - 8x = -13$$

Reste 13

$$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$$

Complete el cuadrado: suma $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

$$(x - 4)^2 = 3$$

Cuadrado perfecto

$$x - 4 = \pm\sqrt{3}$$

Tome la raíz cuadrada

$$x = 4 \pm \sqrt{3}$$

Suma 4

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Ecuación dada

$$3x^2 - 12x = -6$$

Reste 6

$$3(x^2 - 4x) = -6$$

Factorice 3 del lado izquierdo

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ dentro de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$$

Complete el cuadrado: suma 4

$$3(x - 2)^2 = 6$$

Cuadrado perfecto

$$(x - 2)^2 = 2$$

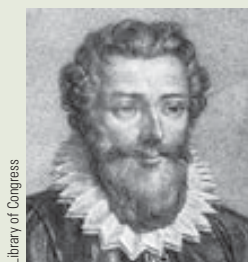
Divida entre 3

$$x - 2 = \pm\sqrt{2}$$

Tome la raíz cuadrada

$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Suma 2



Library of Congress

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades conocidas en una ecuación. Antes de la época de Viète, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que ser resueltas por separado completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) con a , b y c que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones en un solo golpe.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète se arregló para descifrarlo. Sin saber el logro de Viète, el rey español Felipe II protestó ante el Papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

Otro método

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 9 &= 0 \\ (2x + 3)^2 &= 0 \\ 2x + 3 &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Primero, dividimos entre a cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \quad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.

EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$

(b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\begin{array}{c} b = -5 \\ 3x^2 - 5x - 1 = 0 \\ a = 3 \quad c = -1 \end{array}$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

(c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 65, 69 Y 75

En la Sección 3.5 estudiamos el sistema de números complejos, en el que existen las raíces cuadradas de números negativos. La ecuación del Ejemplo 7(c) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo D . Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

- (a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- (b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.
- (c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 79, 81 Y 83

A continuación consideremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará una altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

- (a) ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?
- (b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

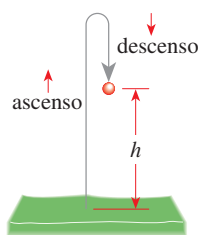
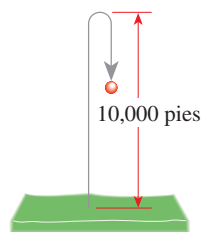
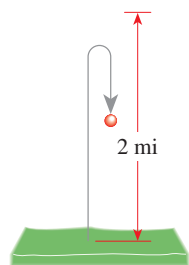
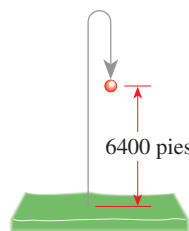
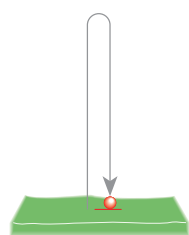


FIGURA 2



- (c) ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?
 (d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

SOLUCIÓN Como la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

$$h = -16t^2 + 800t$$

- (a) El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 0$$

$$0 = -16t(t - 50) \quad \text{Factorice}$$

Por lo tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de 50 segundos.

- (b) Haciendo $h = 6400$ da la ecuación

$$6400 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 6400$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 400 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$

$$(t - 10)(t - 40) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$t = 10 \quad \text{or} \quad t = 40 \quad \text{Resuelva}$$

La bala llega a 6400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

- (c) Dos millas es $2 \times 5280 = 10,560$ pies.

$$10,560 = -16t^2 + 800t \quad \text{Haga } h = 10,560$$

$$16t^2 - 800t + 10,560 = 0 \quad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 660 = 0 \quad \text{Divida entre 16}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 2 millas.

- (d) Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de h , la siguiente ecuación tiene sólo una solución para t :

$$h = -16t^2 + 800t$$

$$16t^2 - 800t + h = 0 \quad \text{Altere al lado izquierdo}$$

Esto a su vez significa que el discriminante D de la ecuación es 0, de modo que

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0$$

$$640,000 - 64h = 0$$

$$h = 10,000$$

La máxima altura alcanzada es 10,000 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 111

▼ Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$.

SOLUCIÓN Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) &= 2x(x+2) && \text{Multiplique por el MCD } x(x+2) \\ 3(x+2) + 5x &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda} \\ 8x + 6 &= 2x^2 + 4x && \text{Expanda el lado izquierdo} \\ 0 &= 2x^2 - 4x - 6 && \text{Reste } 8x + 6 \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 && \text{Divida entre 2 ambos lados} \\ 0 &= (x-3)(x+1) && \text{Factorice} \\ x-3 &= 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \quad \text{o} \quad x+1 = 0 \\ x &= 3 && \text{Resuelva} \quad \quad \quad x = -1 \end{aligned}$$

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son $x = 3$ y -1 .

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 85

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2-x}$.

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= -\sqrt{2-x} && \text{Reste 1} \\ (2x - 1)^2 &= 2 - x && \text{Eleve al cuadrado cada lado} \\ 4x^2 - 4x + 1 &= 2 - x && \text{Expanda el lado izquierdo} \\ 4x^2 - 3x - 1 &= 0 && \text{Sume } -2 + x \\ (4x + 1)(x - 1) &= 0 && \text{Factorice} \\ 4x + 1 &= 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \\ x &= -\frac{1}{4} && \text{Resuelva} \quad \quad \quad x = 1 \end{aligned}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 91

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 3$:

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad \checkmark$$

$x = -1$:

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} \\ &= -3 + 5 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad \checkmark$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{LD} &= 1 - \sqrt{2 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ \text{LI} &= \text{LD} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$x = 1$:

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 2(1) = 2 \\ \text{LD} &= 1 - \sqrt{2-1} \\ &= 1 - 1 = 0 \\ \text{LI} &\neq \text{LD} \quad \times \end{aligned}$$



valores de la variable que la ecuación original. **Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.**

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde W es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático**. Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN Si hacemos $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable W :

$$\begin{aligned} (x^2)^2 - 8x^2 + 8 &= 0 && \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2 \\ W^2 - 8W + 8 &= 0 && \text{Sea } W = x^2 \\ W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} &= 4 \pm 2\sqrt{2} && \text{Fórmula cuadrática} \\ x^2 &= 4 \pm 2\sqrt{2} && W = x^2 \\ x &= \pm \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 95

EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$\begin{aligned} x^{1/3} + x^{1/6} - 2 &= 0 \\ W^2 + W - 2 &= 0 && \text{Sea } W = x^{1/6} \\ (W - 1)(W + 2) &= 0 && \text{Factorice} \\ W - 1 = 0 &\quad \text{o} \quad W + 2 = 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\ W = 1 &\quad W = -2 && \text{Resuelva} \\ x^{1/6} = 1 &\quad x^{1/6} = -2 && W = x^{1/6} \\ x = 1^6 = 1 &\quad x = (-2)^6 = 64 && \text{Tome la 6a. potencia} \end{aligned}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución pero $x = 64$ no lo es. La solución es $x = 1$.

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = 1$:

$$\text{LI} = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$$

$$\text{LD} = 0$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad \checkmark$$

$x = 64$:

$$\begin{aligned} \text{LI} &= 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2 \\ &= 4 + 2 - 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{LD} = 0$$

$$\text{LI} \neq \text{LD} \quad \times$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 99

Al resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, por lo general tomamos casos.

EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5 = 3 & \text{o} & 2x - 5 = -3 \\ 2x = 8 & & 2x = 2 \\ x = 4 & & x = 1 \end{array}$$

Las soluciones son $x = 1, x = 4$.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 105**

1.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- ¿Verdadero o falso?
 - Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
 - Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.
 - Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.
- Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.
 - Por factorización: _____
 - Completando el cuadrado: _____
 - Usando la fórmula cuadrática: _____
- (a) Las soluciones de la ecuación $x^2(x - 4) = 0$ son _____.
 (b) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, _____ el lado izquierdo.
- Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.
 - Aislar el radical: _____
 - Elevar al cuadrado ambos lados: _____
 - Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son _____.
 - La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son) _____.
- La ecuación $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ es del tipo _____. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____. La ecuación cuadrática resultante es _____.
- La ecuación $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ es del tipo _____. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____. La ecuación cuadrática resultante es _____.

HABILIDADES

7-10 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

- $4x + 7 = 9x - 3$
 (a) $x = -2$ (b) $x = 2$
- $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
 (a) $x = 2$ (b) $x = 4$
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 4} = 1$ 10. $\frac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$
 (a) $x = 2$ (b) $x = 4$ (a) $x = 4$ (b) $x = 8$

11-28 ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

- $2x + 7 = 31$ 12. $5x - 3 = 4$
- $\frac{1}{2}x - 8 = 1$ 14. $3 + \frac{1}{3}x = 5$
-  15. $-7w = 15 - 2w$ 16. $5t - 13 = 12 - 5t$
- $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$ 18. $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$
- $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$
- $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$
- $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$ 22. $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$
- $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$ 24. $\frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{4}{5}$
- $\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x + 3}$ 26. $\frac{4}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{35}{x^2 - 1}$
- $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$ 28. $\sqrt{3x} + \sqrt{12} = \frac{x + 5}{\sqrt{3}}$

29-42 ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

-  29. $PV = nRT$; despeje R 30. $F = G \frac{mM}{r^2}$; despeje m

31. $P = 2l + 2w$; despeje w 32. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; despeje R_1

33. $\frac{ax+b}{cx+d} = 2$; despeje x

34. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje x

35. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje x

36. $\frac{a+1}{b} = \frac{a-1}{b} + \frac{b+1}{a}$; despeje a

37. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje r 38. $F = G \frac{mM}{r^2}$; despeje r

39. $a^2 + b^2 = c^2$; despeje b

40. $A = P \left(1 + \frac{i}{100} \right)^2$; despeje i

41. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$; despeje t 42. $S = \frac{n(n+1)}{2}$; despeje n

43-54 ■ Resuelva la ecuación por factorización.

43. $x^2 + x - 12 = 0$

44. $x^2 + 3x - 4 = 0$

45. $x^2 - 7x + 12 = 0$

46. $x^2 + 8x + 12 = 0$

47. $4x^2 - 4x - 15 = 0$

48. $2y^2 + 7y + 3 = 0$

49. $3x^2 + 5x = 2$

50. $6x(x - 1) = 21 - x$

51. $2x^2 = 8$

52. $3x^2 - 27 = 0$

53. $(3x + 2)^2 = 10$

54. $(2x - 1)^2 = 8$

55-62 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

55. $x^2 + 2x - 5 = 0$

56. $x^2 - 4x + 2 = 0$

57. $x^2 - 6x - 11 = 0$

58. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

59. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

60. $3x^2 - 6x - 1 = 0$

61. $4x^2 - x = 0$

62. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

63-78 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

63. $x^2 - 2x - 15 = 0$

64. $x^2 + 5x - 6 = 0$

65. $x^2 - 7x + 10 = 0$

66. $x^2 + 30x + 200 = 0$

67. $2x^2 + x - 3 = 0$

68. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

69. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

70. $x^2 - 6x + 1 = 0$

71. $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

72. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

73. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

74. $0 = x^2 - 4x + 1$

75. $w^2 = 3(w - 1)$

76. $3 + 5z + z^2 = 0$

77. $10y^2 - 16y + 5 = 0$

78. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

79-84 ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

79. $x^2 - 6x + 1 = 0$

80. $3x^2 = 6x - 9$

81. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

82. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

83. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

84. $x^2 + rx - s = 0$ ($s > 0$)

85-108 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

85. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$

86. $\frac{10}{x} - \frac{12}{x-3} + 4 = 0$

87. $\frac{x^2}{x+100} = 50$

88. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} = 0$

89. $\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} + \frac{28}{x^2-4}$

90. $\frac{x}{2x+7} - \frac{x+1}{x+3} = 1$

91. $\sqrt{2x+1} + 1 = x$

92. $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$

93. $2x + \sqrt{x+1} = 8$

94. $\sqrt{\sqrt{x-5} + x} = 5$

95. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

96. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

97. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

98. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

99. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

100. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

101. $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

102. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

103. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

104. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

105. $|3x + 5| = 1$

106. $|2x| = 3$

107. $|x - 4| = 0.01$

108. $|x - 6| = -1$

APLICACIONES

109-110 ■ Problemas de cuerpos en caída Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = 16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

109. Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

110. Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

(a) ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?

(b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

111-112 ■ Problemas de cuerpos en caída Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0t$ que se estudia en el Ejemplo 9.

111. Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

(a) ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

(b) ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

(c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

(d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

(e) ¿Cuándo cae al suelo?

112. ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [Sugerencia: Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0t + h = 0$.]

113. Contracción en vigas de concreto A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m³, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10,000}$$

donde S es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

(a) Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m³ de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S ? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

1.10 RECTAS

Pendiente de una recta ► Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ► Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ► Rectas verticales y horizontales ► Ecuación general de una recta ► Rectas paralelas y perpendiculares ► Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

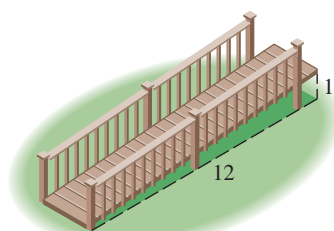
En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la “inclinación” de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.



Pendiente de una rampa

$$\text{Pendiente} = \frac{1}{12}$$



Inclinación de un techo

$$\text{Pendiente} = \frac{1}{3}$$



Pendiente de una carretera

$$\text{Pendiente} = \frac{8}{100}$$

FIGURA 1

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada x y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

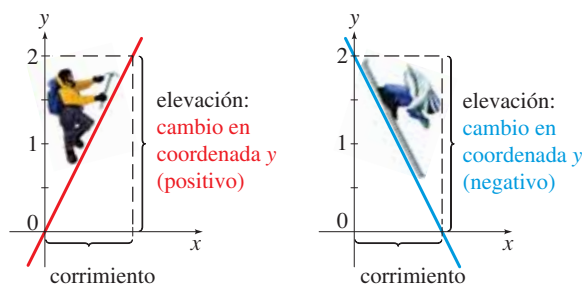


FIGURA 2

PENDIENTE DE UNA RECTA

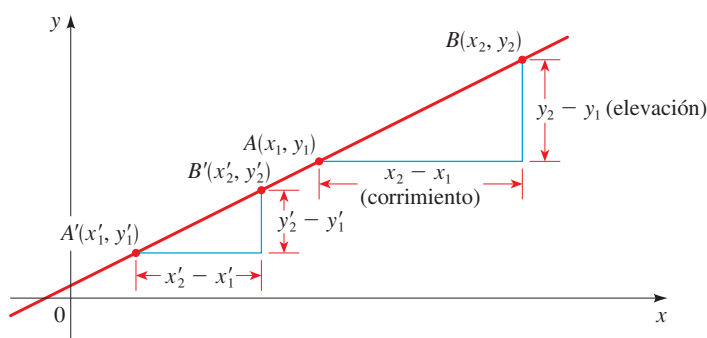
La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

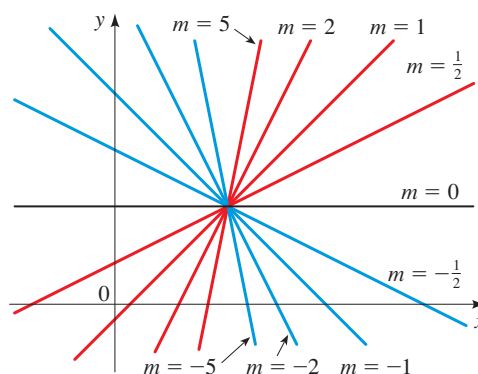
La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

**FIGURA 3**

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

**FIGURA 4** Rectas con varias pendientes

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

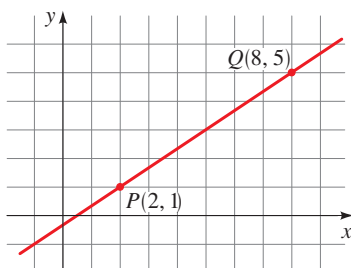


FIGURA 5

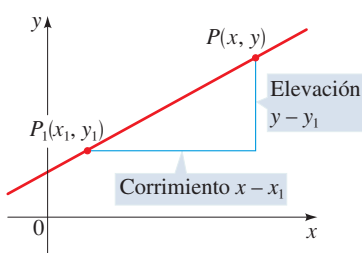


FIGURA 6

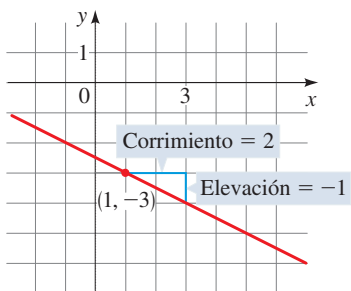


FIGURA 7

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

▼ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m . Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (vea Figura 6), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; nótese que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

- (a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.
 (b) Trace la recta.

SOLUCIÓN

- (a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{Pendiente } m = -\frac{1}{2}, \text{ punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \quad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \quad \text{Reacomode}$$

- (b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar ya sea el punto $(-1, 2)$ o el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1) \quad \text{Pendiente } m = -\frac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \quad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad \text{Reacomode}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

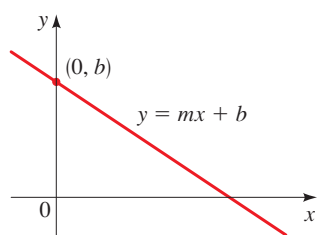


FIGURA 8

▼ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y a b como punto de intersección con el eje y (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = 0$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

- (a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2 .
- (b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

- (a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

- (b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \quad \text{Sume } 2x$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{Divida entre 3}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje y es $b = \frac{1}{3}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 25 Y 47

Pendiente $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ Intersección en eje y

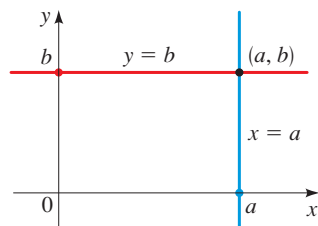


FIGURA 9

▼ Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x , porque la coordenada x de todo punto en la recta es a .

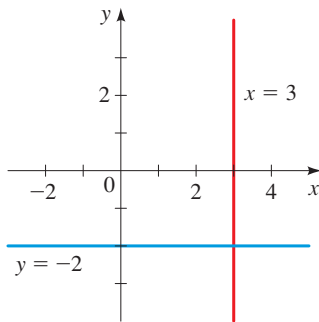


FIGURA 10

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

- (a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por $(3, 5)$ es $x = 3$.
- (b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x .
- (c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.
- (d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y .

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 33

▼ Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A , B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{Divida por } B$$

y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \quad \text{Haga } B = 0$$

o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

EJEMPLO 6 | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

SOLUCIÓN 1 Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con x : Sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección con y : Sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

SOLUCIÓN 2 Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$2x - 3y - 12 = 0$$

$$2x - 3y = 12$$

Sume 12

$$-3y = -2x + 12$$

Reste $2x$

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

Divida entre -3

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección y es $b = -4$. Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje y y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

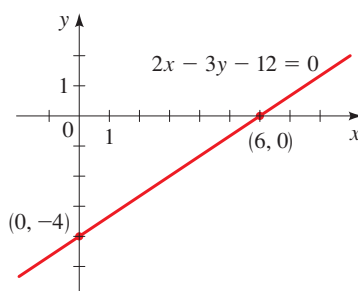


FIGURA 11

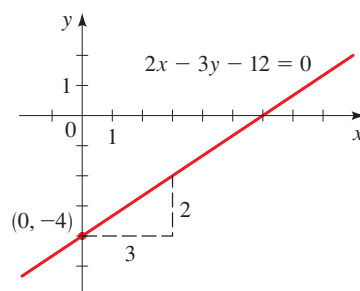


FIGURA 12

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53**

▼ Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

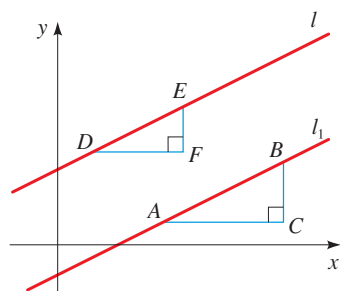


FIGURA 13

DEMOSTRACIÓN Consideremos que las rectas l_1 y l_2 de la Figura 13 tienen pendientes m_1 y m_2 . Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas.

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 5 &= 0 \\ 6y &= -4x - 5 && \text{Reste } 4x + 5 \\ y &= -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} && \text{Divida entre 6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{2}{3}(x - 5) && \text{Pendiente } m = -\frac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2) \\ 3y - 6 &= -2x + 10 && \text{Multiplique por 3} \\ 2x + 3y - 16 &= 0 && \text{Reacomode} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

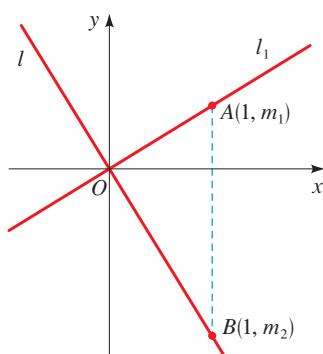


FIGURA 14

DEMOSTRACIÓN En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2 , entonces sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre l_1 y $B(1, m_2)$ está sobre l_2 . Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219) $OA \perp OB$ si y sólo si

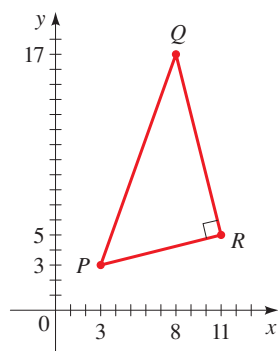
$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$\begin{aligned} (1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) &= (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\ 2 + m_1^2 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2 \\ 2 &= -2m_1 m_2 \\ m_1 m_2 &= -1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

**FIGURA 15**

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 57

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por $(0, 0)$, la forma punto-pendiente da

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{3}{2}(x - 0) && \text{Pendiente } m = \frac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0) \\ y &= \frac{3}{2}x && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

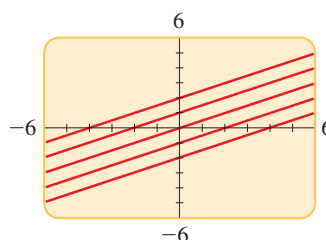
EJEMPLO 10 | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

SOLUCIÓN Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

**FIGURA 16** $y = 0.5x + b$

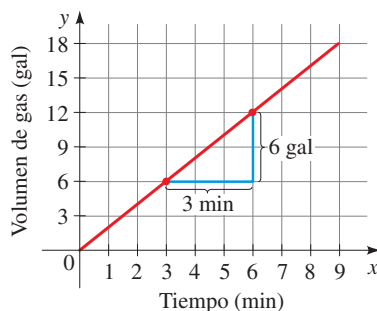
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 41

▼ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

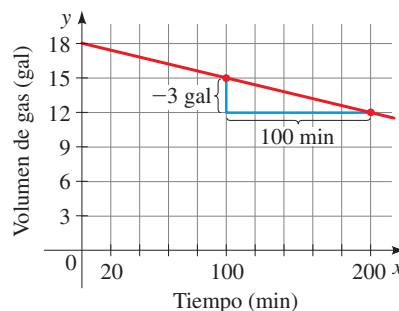
Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03 .



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2



(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es -0.03

FIGURA 17

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua w del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y w se mide en pies.

- (a) Trace la gráfica de esta ecuación.
(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección w de esta gráfica?

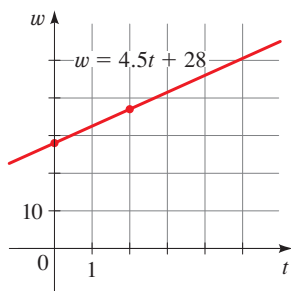


FIGURA 18

SOLUCIÓN

- (a) Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

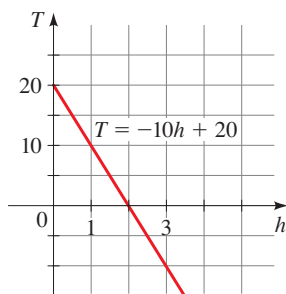
La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

- (b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección w es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 69

EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

- (a) A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C , exprese la temperatura T (en $^\circ\text{C}$) en términos de la altitud h (en km). (Suponga que la relación entre T y h es lineal.)

**FIGURA 19**

- (b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?
 (c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

- (a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h , la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$

$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$

$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

- (b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10^\circ\text{C}/\text{km}$, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10°C por kilómetro de altitud.
 (c) A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5^\circ\text{C}$$

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 73

1.10 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- Encontramos la “inclinación”, o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas ____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas _____. Entonces, la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(2, 5)$ tiene pendiente _____.
- Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.
 - Esta recta tiene pendiente _____.
 - Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente _____.
 - Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente _____.
- La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto $(1, 2)$ es _____.

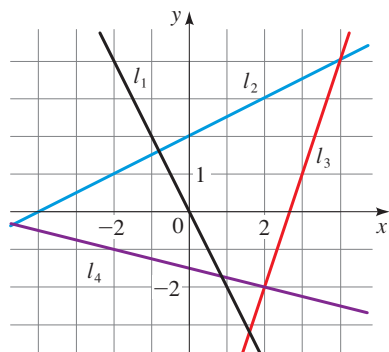
- (a) La pendiente de una recta horizontal es _____. La ecuación de la recta horizontal que pasa por $(2, 3)$ es _____.
- (b) La pendiente de una recta vertical es _____. La ecuación de la recta vertical que pasa por $(2, 3)$ es _____.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q .

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 5. $P(0, 0), Q(4, 2)$ | 6. $P(0, 0), Q(2, -6)$ |
| 7. $P(2, 2), Q(-10, 0)$ | 8. $P(1, 2), Q(3, 3)$ |
| 9. $P(2, 4), Q(4, 3)$ | 10. $P(2, -5), Q(-4, 3)$ |
| 11. $P(1, -3), Q(-1, 6)$ | 12. $P(-1, -4), Q(6, 0)$ |

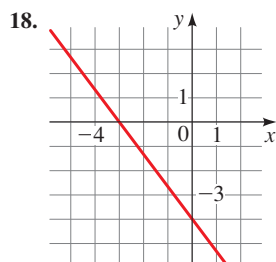
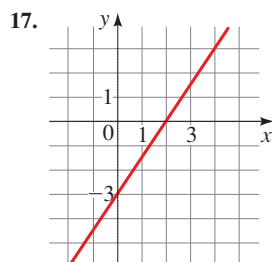
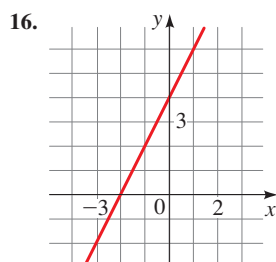
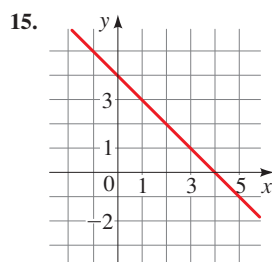
13. Encuentre las pendientes de las rectas l_1 , l_2 , l_3 y l_4 en la figura siguiente.



14. (a) Trace rectas que pasen por $(0, 0)$ con pendientes $1, 0, \frac{1}{2}, 2$ y -1 .

- (b) Trace rectas que pasen por $(0, 0)$ con pendientes $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ y 3 .

- 15-18 ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.



- 19-38 ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

19. Pasa por $(2, 3)$, pendiente 5
 20. Pasa por $(-2, 4)$, pendiente -1
 21. Pasa por $(1, 7)$, pendiente $\frac{2}{3}$
 22. Pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$
 23. Pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$
 24. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$
 25. Pendiente 3 ; intersección en y es -2
 26. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en y es 4
 27. Intersección en x es 1 ; intersección en y es -3
 28. Intersección en x es -8 ; intersección en y es 6

29. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x
 30. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje y
 31. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$
 32. Intersección en y es 6 ; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$
 33. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$
 34. Pasa por $(2, 6)$; perpendicular a la recta $y = 1$
 35. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$
 36. Pasa por $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$
 37. Pasa por $(1, 7)$; paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-2, 1)$
 38. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$
 39. (a) Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$
 (b) Encuentre la ecuación para esta recta.
 40. (a) Trace la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$
 (b) Encuentre la ecuación para esta recta.

- 41-44 ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

41. $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$
 42. $y = mx - 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$
 43. $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$
 44. $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

- 45-56 ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección y de la recta y trace su gráfica.

45. $x + y = 3$
 46. $3x - 2y = 12$
 47. $x + 3y = 0$
 48. $2x - 5y = 0$
 49. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$
 50. $-3x - 5y + 30 = 0$
 51. $y = 4$
 52. $x = -5$
 53. $3x - 4y = 12$
 54. $4y + 8 = 0$
 55. $3x + 4y - 1 = 0$
 56. $4x + 5y = 10$
 57. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.
 58. Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
 59. Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.
 60. Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).
 (a) $(1, 1)$, $(3, 9)$, $(6, 21)$
 (b) $(-1, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 15)$
 61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$

62. Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

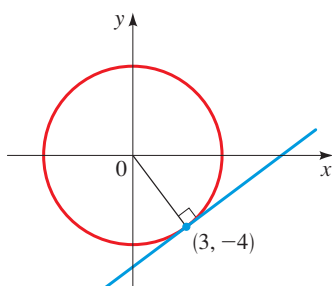
$$2y + 3x - 6 = 0$$

63. (a) Demuestre que si los puntos de intersección x y y de una recta son números diferentes de cero a y b , entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

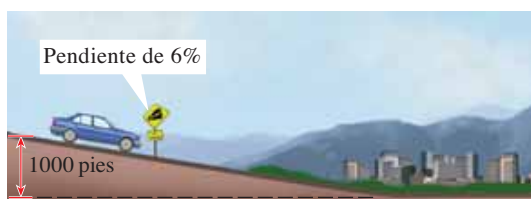
Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

- (b) Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección x es 6 y cuyo punto de intersección y es -8 .
64. (a) Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)
- (b) ¿En qué otro punto sobre la circunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?



APLICACIONES

65. **Pendiente de una carretera** Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?



66. **Calentamiento global** Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$ y t es años desde 1950.

- (a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T ?
- (b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

67. **Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es D (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a , los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

- (a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?
- (b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

68. **Mercado de segunda mano** La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra x dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número y de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

- (a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)
- (b) ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección y y el punto de intersección x de la gráfica?

69. **Costo de producción** Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce x hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde y se mide en dólares).

- (a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.
- (b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

70. **Escalas de temperatura** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

- (a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.
- (b) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [Sugerencia: Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje a .]

C	F
-30°	
-20°	
-10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

71. **Grillos y temperatura** Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70°F y 168 chirridos por minuto a 80°F .

- (a) Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura t y el número de chirridos por minuto n .
- (b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

72. **Depreciación** Un pequeño negocio compra una computadora en \$4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de \$200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ► Método de sustitución
► Método por eliminación ► Método gráfico ► El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ► Modelado con sistemas lineales

▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5 \quad \checkmark$	$3 + 4(1) = 7 \quad \checkmark$

La solución también se puede escribir como el par ordenado $(3, 1)$.

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución $(3, 1)$ satisface cada una de las ecuaciones, el punto $(3, 1)$ se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

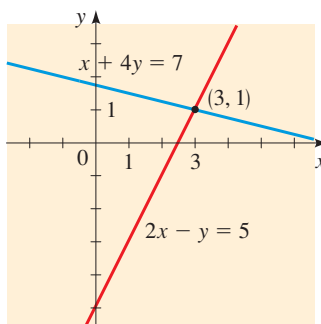


FIGURA 1

▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

- Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
- Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
- Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \quad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x .

$$3x + 4(1 - 2x) = 14 \quad \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2}$$

$$3x + 4 - 8x = 14 \quad \text{Expanda}$$

$$-5x + 4 = 14 \quad \text{Simplifique}$$

$$-5x = 10 \quad \text{Reste 4}$$

$$x = -2 \quad \text{Despeje } x$$

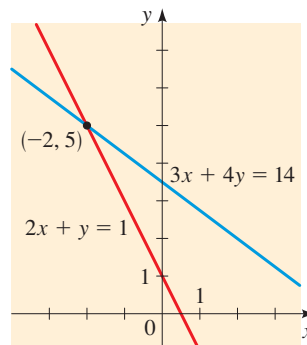
Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \quad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$$x = -2, y = 5:$$

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \quad \checkmark$$

**FIGURA 2** **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5****▼ Método por eliminación**Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.**MÉTODO POR ELIMINACIÓN**

- 1. Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
- 2. Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.
- 3. Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & \text{Sistema} \\ \hline 4x & = & 16 \\ x & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sume} \\ \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y . Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y = 2 & \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y = -2 & \text{Reste 4} \\ y = 1 & \text{Despeje } y \end{array}$$

La solución es $(4, 1)$. La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto $(4, 1)$.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9**

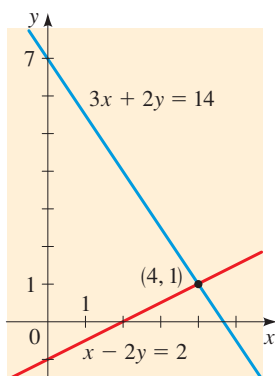


FIGURA 3

▼ Método gráfico



En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

MÉTODO GRÁFICO

- 1. Graficar cada ecuación.** Expresar cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar y como función de x . Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
- 2. Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Predicción del clima



© Rachel Epstein/Photo Edit

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico

diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas

y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo xx unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

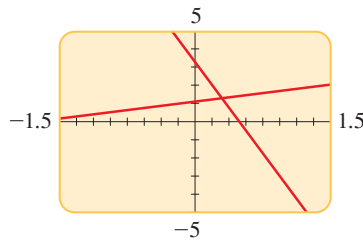
$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = 1.06 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejando y en términos de x , obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente $(0.30, 1.3)$.

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 13 Y 49**

**FIGURA 4**▼ **El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas**

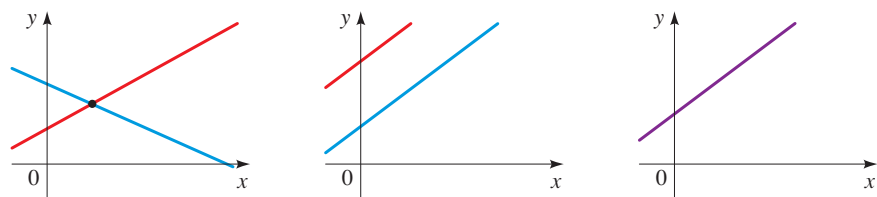
La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.



- (a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.
- (b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.
- (c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene un infinito de soluciones.

FIGURA 5**EJEMPLO 4** | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

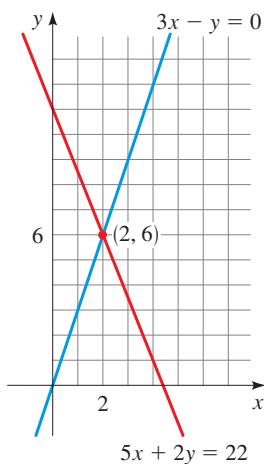


FIGURA 6

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 2, y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \quad \checkmark$$

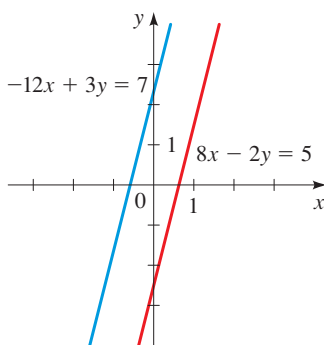


FIGURA 7

SOLUCIÓN Eliminamos y de las ecuaciones y despejamos x .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6x - 2y = 0 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \\ \hline 11x &= 22 & \text{Sume} \\ x &= 2 & \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos y :

$$\begin{aligned} 6(2) - 2y &= 0 & \text{Sustituimos de nuevo } x = 2 \\ -2y &= -12 & \text{Restamos } 6 \times 2 = 12 \\ y &= 6 & \text{Despejamos } y \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par ordenado $(2, 6)$, es decir,

$$x = 2, \quad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto $(2, 6)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y . La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{aligned} \begin{cases} 24x - 6y = 15 & 3 \times \text{Ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & 2 \times \text{Ecuación 2} \end{cases} \\ \hline 0 &= 29 & \text{Sume} \end{aligned}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto* x *como* y en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a x y a y , no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

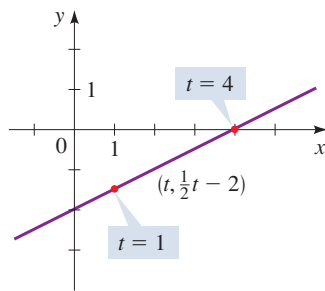
Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x . Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{Ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan

**FIGURA 8**

una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con t representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$

$$y = \frac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$(t, \frac{1}{2}t - 2)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 37

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a t . Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $(1, -\frac{3}{2})$. si $t = 4$, obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de t obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

▼ Modelado con sistemas lineales

Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

- 1. Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas x y y o con alguna otra letra).
- 2. Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
- 3. Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
- 4. Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

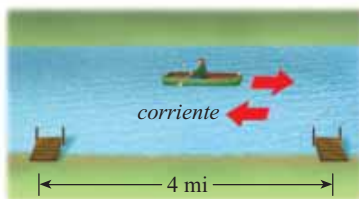
EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

SOLUCIÓN **Identificar las variables.** Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$



Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable. La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad aguas arriba	$x - y$
Velocidad aguas abajo	$x + y$

Establecer un sistema de ecuaciones. La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad $\times$ tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

$$\text{velocidad aguas arriba} \times \text{tiempo aguas arriba} = \text{distancia recorrida}$$

$$\text{velocidad aguas abajo} \times \text{tiempo aguas abajo} = \text{distancia recorrida}$$

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y) \frac{3}{2} = 4 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y) \frac{3}{4} = 4 \quad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por hora.)

Resolver el sistema. Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 3x - 3y = 8 \\ 3x + 3y = 16 \end{cases} & \begin{array}{l} 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 4 \times \text{Ecuación 2} \end{array} \\ \hline 6x & = & 24 \\ x & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sume} \\ \text{Despeje } x \end{array}$$

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando y , tendremos

$$\begin{array}{rcl} 3(4) - 3y & = & 8 \\ -3y & = & 8 - 12 \\ y & = & \frac{4}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sustituya } x = 4 \\ \text{Reste 12} \\ \text{Despeje } y \end{array}$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a $1\frac{1}{3}$ mi/h.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Velocidad contra la corriente es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2} \text{ h}} = 2\frac{2}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

$$\begin{aligned} &\text{velocidad de remo} - \text{flujo del agua} \\ &= 4 \text{ mi/h} - \frac{4}{3} \text{ mi/h} = 2\frac{2}{3} \text{ mi/h} \end{aligned}$$

Velocidad río abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4} \text{ h}} = 5\frac{1}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

$$\begin{aligned} &\text{velocidad de remo} + \text{flujo del agua} \\ &= 4 \text{ mi/h} + \frac{4}{3} \text{ mi/h} = 5\frac{1}{3} \text{ mi/h} \end{aligned} \quad \checkmark$$

EJEMPLO 8 | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

SOLUCIÓN **Identificar las variables.** Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

En palabras	En álgebra
Cantidad de vino utilizada (L)	x
Cantidad de solución de alcohol utilizada (L)	y
Cantidad de alcohol en vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \quad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \quad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable x y obtenemos

$$6y = 600 \quad \text{Reste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \quad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x .

$$x + 100 = 1000 \quad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \quad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65**

10.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _____ y _____. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema, verificamos si $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _____ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), (-1, 3), (2, 1)$$

2. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _____, el método de _____ o el método _____.
3. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _____ solución o _____ soluciones.
4. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _____ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \end{aligned}$$

donde t es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son $(1, \underline{\quad})$, $(-3, \underline{\quad})$ y $(5, \underline{\quad})$.

HABILIDADES

5-8 ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5. \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} & \quad 6. \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \\ 7. \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} & \quad 8. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

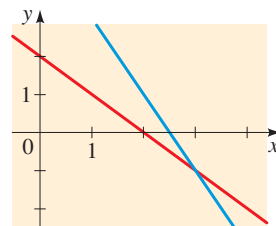
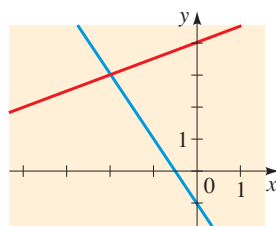
9-12 ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 9. \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases} & \quad 10. \begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases} \\ 11. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} & \quad 12. \begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

13-14 ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

$$13. \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$



15-20 ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

$$15. \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$$

21-48 ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

$$21. \begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$$

39. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$
41. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$
43. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$
45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$
47. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$
40. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$
42. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$
44. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$
46. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$
48. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$



49-52 ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar y en términos de x antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando **TRACE** o usando la función **Intersect**.

49. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$
50. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$
51. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13,591 \\ 9815x + 992y = 618,555 \end{cases}$
52. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

53-56 ■ Encuentre x y y en términos de a y b .

53. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$
54. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$
55. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$
56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

APLICACIONES

- 57. Problema de números** Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.
- 58. Problema de números** La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.
- 59. Valor de monedas** Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es \$2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?
- 60. Precio de entrada** El precio de entrada a un parque de diversiones es \$1.50 para niños y \$4.00 para adultos. En cierto

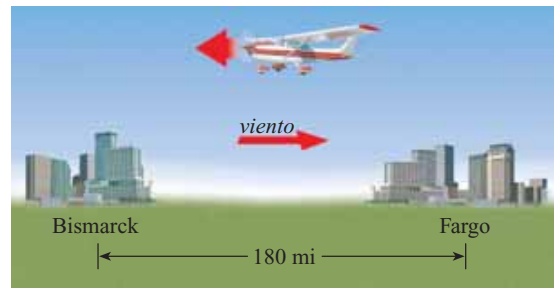
día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron \$5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

- 61. Gasolinera** Una gasolinera vende gasolina regular en \$2.20 el galón y gasolina Premium en \$3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron \$680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

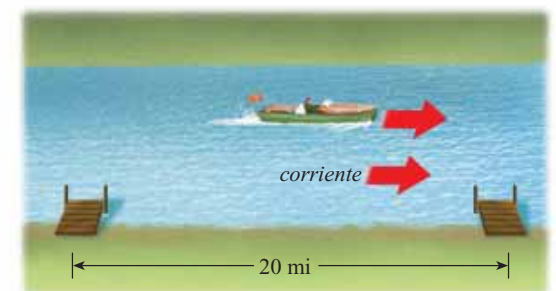
- 62. Puesto de frutas** Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en \$7 y una de lujo se vende en \$10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de \$1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?



- 63. Velocidad de un avión** Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?



- 64. Velocidad de un bote** Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?



- 65. Nutrición** Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ► Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ► Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

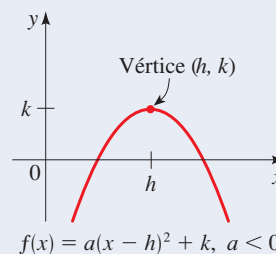
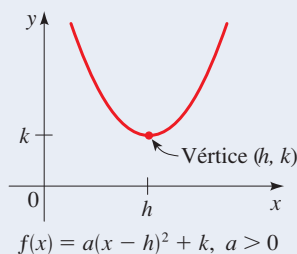
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k) ; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Expresa f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f .

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$$

El vértice es (3, 5)

SOLUCIÓN

- (a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$$

$$= 2(x^2 - 6x) + 23$$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9$$

$$= 2(x - 3)^2 + 5$$

Factorice 2 de los términos en x

Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste $2 \cdot 9$ fuera

Factorice y simplifique

La forma normal es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

- (b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

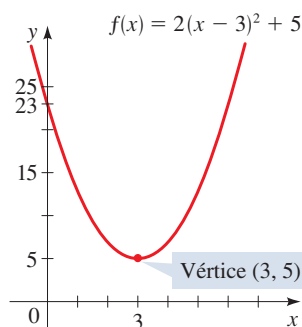


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

▼ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

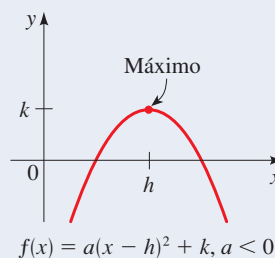
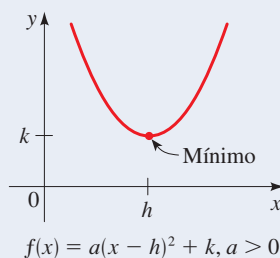
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k) , entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



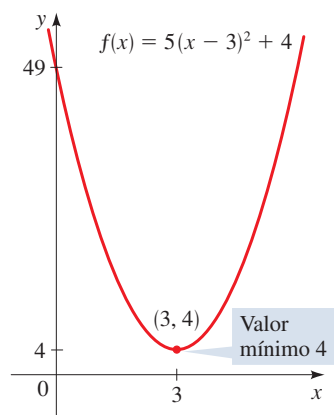


FIGURA 2

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

- Expresar f en forma normal.
- Tracer la gráfica de f .
- Encuentre el valor mínimo de f .

SOLUCIÓN

- Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\
 &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\
 &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\
 &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique}
 \end{aligned}$$

- La gráfica es la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.
- Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 25

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

- Expresar f en forma normal.
- Tracer la gráfica de f .
- Encuentre el valor máximo de f .

SOLUCIÓN

- Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^2 + x + 2 \\
 &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\
 &= -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 2 - (-1)\frac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Suma } \frac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\frac{1}{4} \text{ fuera} \\
 &= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique}
 \end{aligned}$$

- De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en y es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en x , hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned}
 -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\
 x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\
 (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice}
 \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

- Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

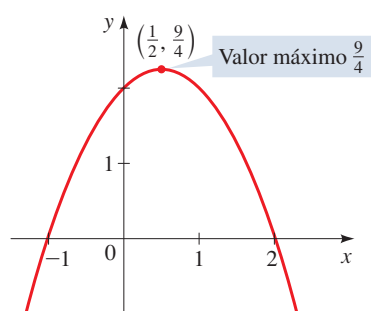


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o

mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \\
 & && \text{dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

- (a) $f(x) = x^2 + 4x$ (b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

SOLUCIÓN

- (a) Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

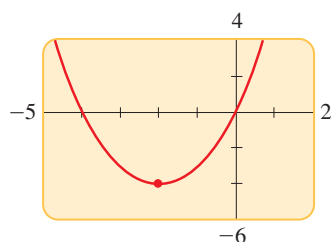
$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

- (b) Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

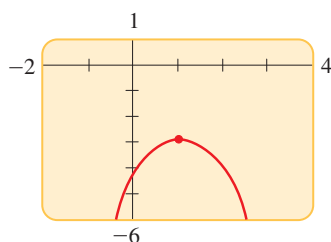
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*.

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



El valor mínimo ocurre en $x = -2$.



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 33 Y 35

▼ Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \quad 15 \leq s \leq 70$$

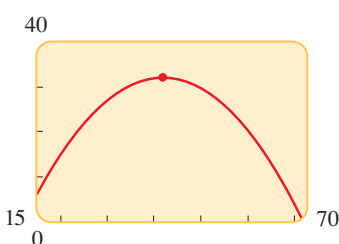
donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{28})} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

✎ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

- Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.
- Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.
- ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

- Expresa verbalmente el modelo.** El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x .

Verbalmente	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x .

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$

$$R(x) = x(23,500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23,500x - 1000x^2$$

- (b) **Use el modelo.** Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23,500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23,500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

- (c) **Use el modelo.** Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

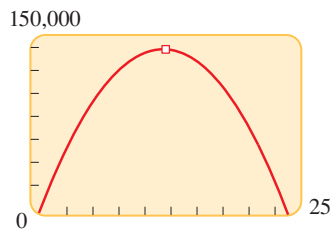
$$23,500x - 1000x^2 = 0 \quad \text{Haga } R(x) = 0$$

$$23.5x - x^2 = 0 \quad \text{Divida entre 1000}$$

$$x(23.5 - x) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \quad \text{Despeje } x$$

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 77

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el _____.
- La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.
 - La gráfica de f es una parábola con vértice (____, ____).
 - Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia _____. En este caso $f(h) = k$ es el valor _____ de f .
 - Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia _____. En este caso $f(h) = k$ es el valor _____ de f .
- La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____, ____), y $f(3) = \underline{\hspace{1cm}}$ es el valor (mínimo/máximo) _____ de f .
- La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (____, ____),

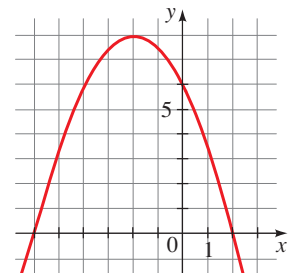
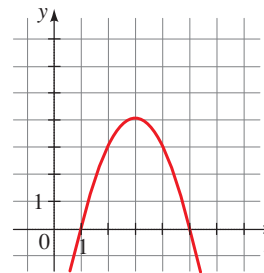
y $f(3) = \underline{\hspace{1cm}}$ es el valor (mínimo/máximo) _____ de f .

HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f . (a) Encuentre las coordenadas del vértice. (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de f . (c) Encuentre el dominio y rango de f .

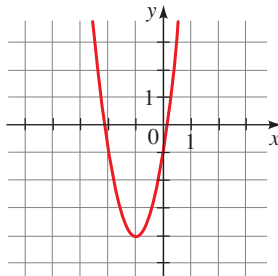
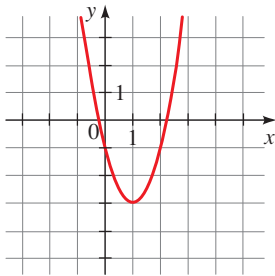
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Exprese la función cuadrática en forma normal. (b) Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y . (c) Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$

10. $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$

12. $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

14. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

16. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

18. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

20. $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$

22. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Exprese la función cuadrática en forma normal. (b) Trace su gráfica. (c) Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

24. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

26. $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

28. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

30. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$

32. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$

34. $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$

36. $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

38. $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

40. $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

42. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

46. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$

48. $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

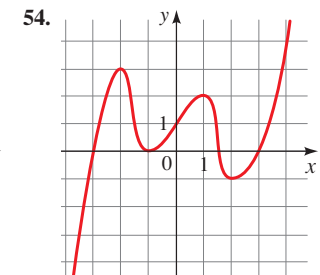
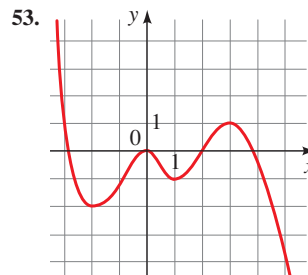
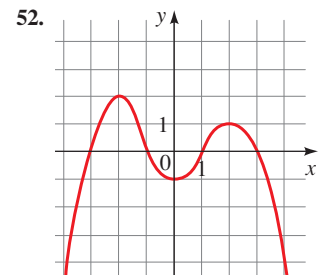
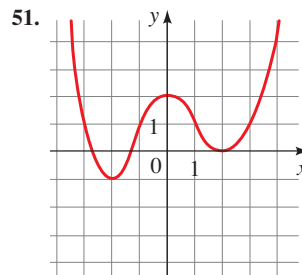


49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. (a) Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f , correcta a dos lugares decimales. (b) Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f , y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \frac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

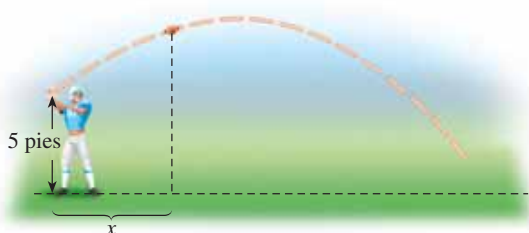
63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

- 64. Trayectoria de un balón** Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45° con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

- (a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.
(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



- 65. Ingresos** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

- 66. Ventas** Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

- 67. Publicidad** La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

- 68. Productos farmacéuticos** Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \leq t \leq 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

- 69. Agricultura** El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



- 70. Agricultura** En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

- 71-74 ■** Use las fórmulas de esta sección para dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

71. Problema 21

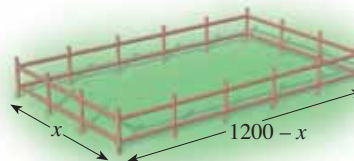
72. Problema 22

73. Problema 25

74. Problema 24

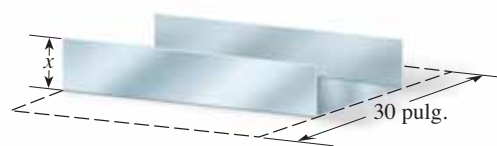
- 75. Cercar un corral para caballos** Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

- (a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.
(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.



- 76. Hacer un canal para agua de lluvia** Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

- (a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x .
(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.
(c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



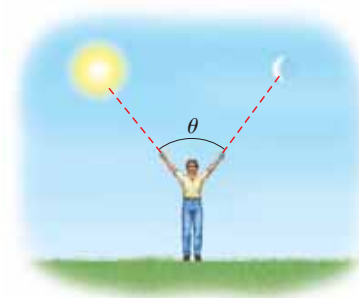
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

- 6.1 Medida de un ángulo
- 6.2 Trigonometría de triángulos rectángulos
- 6.3 Funciones trigonométricas de ángulos
- 6.4 Funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos
- 6.5 La Ley de Senos
- 6.6 La Ley de Cosenos

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Topografía

Supóngase que deseamos hallar la distancia de la Tierra al Sol. Usar una cinta de medir es obviamente impráctico, de modo que necesitamos algo que no sea simples mediciones para atacar este problema. Los ángulos son más fáciles de medir que las distancias. Por ejemplo, podemos hallar el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna con sólo apuntar al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar relaciones entre ángulos y distancias. En consecuencia, si tuviéramos una forma de determinar distancias a partir de ángulos, podríamos hallar la distancia al Sol sin tener que ir hasta ahí. Las funciones trigonométricas nos dan las *herramientas* que necesitamos.



Si θ es un ángulo en un triángulo rectángulo, entonces la relación trigonométrica $\sin \theta$ está definida como la longitud del lado opuesto a θ dividido entre la longitud de la hipotenusa. Esta relación es la misma en *cualquier* triángulo rectángulo semejante, incluyendo el enorme triángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna. (Vea la Sección 6.2, Ejercicio 61.)

Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas equivalentes pero distintas: como funciones de números reales (Capítulo 5) o como funciones de ángulos (Capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, de modo que **ya sea el Capítulo 5 o el Capítulo 6 se pueden estudiar primero**. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para diferentes aplicaciones.

6.1 MEDIDA DE UN ÁNGULO

Medida de un ángulo ► Ángulos en posición normal ► Longitud de un arco de circunferencia ► Área de un sector circular ► Movimiento circular

Un **ángulo** AOB está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (vea Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2 . En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como **negativo**.

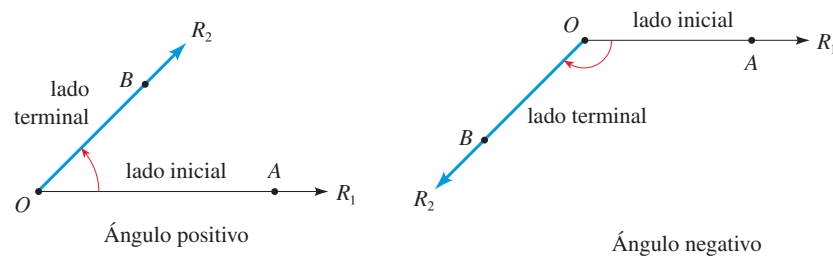


FIGURA 1

Medida de un ángulo

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2 . Intuitivamente, esto es cuánto es lo que “abre” el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la **medida en radianes**. La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

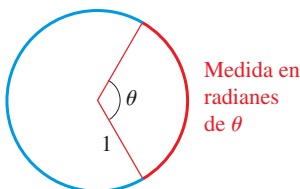


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE MEDIDA EN RADIÁN

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtende el ángulo (vea Figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene una medida π rad, y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que esté subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de la circunferencia unitaria tiene medida 2 en radianes (vea Figura 3).

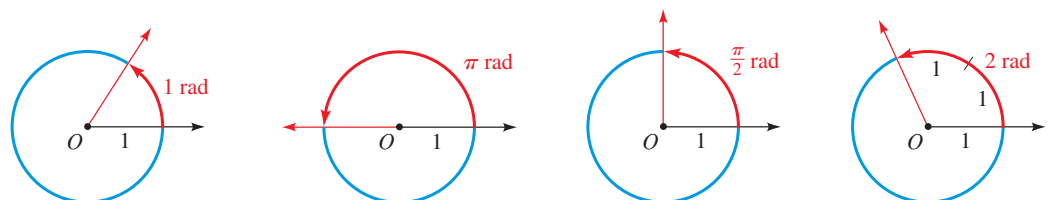
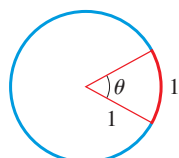


FIGURA 3 Medida en radianes

Como una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π rad, obtenemos la siguiente y sencilla relación entre estos dos métodos de medición de ángulos.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296^\circ$

FIGURA 4

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

Para tener alguna idea del tamaño de 1 radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296^\circ \quad \text{y} \quad 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo θ de medida 1 radián se muestra en la Figura 4.

EJEMPLO 1 | Convertir entre radianes y grados

- (a) Exprese 60° en radianes. (b) Exprese $\frac{\pi}{6}$ rad en grados.

SOLUCIÓN La relación entre grados y radianes da

$$(a) \quad 60^\circ = 60 \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad (b) \quad \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{180}{\pi}\right) = 30^\circ$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 3 Y 15

Una nota de terminología: A veces usamos frases como “un ángulo de 30° ” para querer decir *un ángulo cuya medida es 30°* . También, para un ángulo θ , escribimos $\theta = 30^\circ$ o $\theta = \pi/6$ para querer decir que *la medida de θ es 30° o $\pi/6$ rad*. **Cuando no se da una unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.**

▼ Ángulos en posición normal

Un ángulo está en **posición normal** si está trazado en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo x . La Figura 5 da ejemplos de ángulos en posición normal.

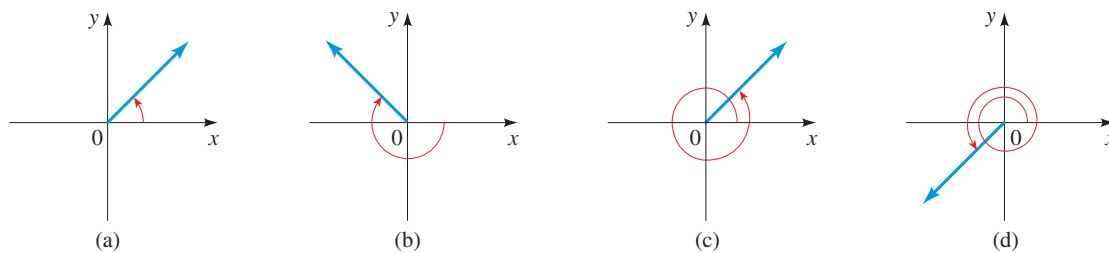


FIGURA 5 Ángulos en posición normal

Dos ángulos en posición normal son **coterminales** si sus lados coinciden. En la Figura 5, los ángulos en (a) y en (c) son coterminales.

EJEMPLO 2 | Ángulos coterminales

- (a) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = 30^\circ$ en posición normal.
(b) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ en posición normal.

SOLUCIÓN

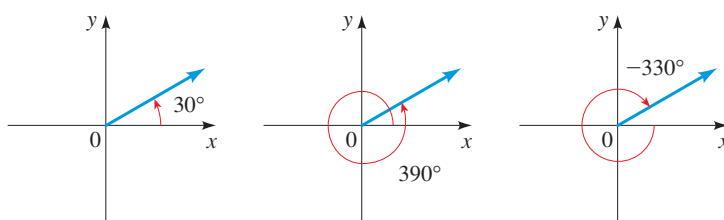
- (a) Para hallar ángulos positivos que sean coterminal con θ , sumamos cualquier múltiplo de 360° . Así,

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \quad \text{y} \quad 30^\circ + 720^\circ = 750^\circ$$

son coterminal con $\theta = 30^\circ$. Para hallar ángulos negativos que son coterminal con θ , restamos cualquier múltiplo de 360° . Así

$$30^\circ - 360^\circ = -330^\circ \quad \text{y} \quad 30^\circ - 720^\circ = -690^\circ$$

son coterminal con θ . (Vea Figura 6.)

**FIGURA 6**

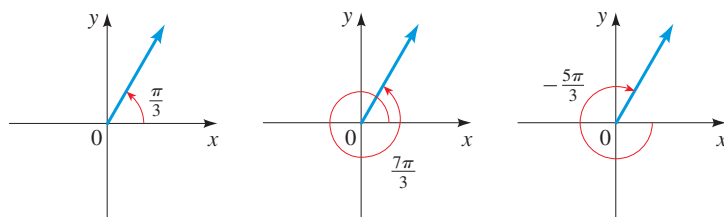
- (b) Para hallar ángulos positivos que sean coterminal con θ , sumamos cualquier múltiplo de 2π . Así,

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminal con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que sean coterminal con θ , restamos cualquier múltiplo de 2π . Así

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminal con θ . (Vea Figura 7.)

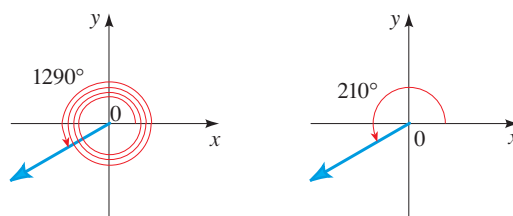
**FIGURA 7****AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 27 Y 29****EJEMPLO 3** | Ángulos coterminal

Encuentre un ángulo con medida entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo de medida 1290° en posición normal.

SOLUCIÓN De 1290° podemos restar 360° tantas veces como se desee, y el ángulo restante será coterminal con 1290° . Así, $1290^\circ - 360 = 930^\circ$ es coterminal con 1290° y por lo tanto el ángulo $1290^\circ - 2(360^\circ) = 570^\circ$.

Para hallar el ángulo que buscamos entre 0° y 360° , restamos 360° de 570° tantas veces como sea necesario. Una forma eficiente de hacer esto es determinar cuántas veces cabe 360° en 570° , es decir, divide 570 entre 360, y el residuo será el ángulo que buscamos.

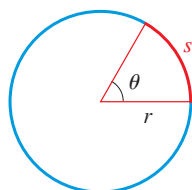
Vemos que 360 cabe tres veces en 1290, con un residuo de 210. Así, 210° es el ángulo deseado (vea Figura 8).

**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39

▼ Longitud de un arco de circunferencia

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio r , la longitud s de un arco que subtiende al ángulo θ (vea Figura 9) es

**FIGURA 9** $s = \theta r$

$$\begin{aligned} s &= \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo} \\ &= \frac{\theta}{2\pi} (2\pi r) = \theta r \end{aligned}$$

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

En una circunferencia de radio r , la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

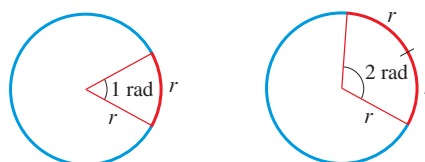
$$s = r\theta$$

Despejando θ , obtenemos la importante fórmula

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Esta fórmula nos permite definir medidas en radianes usando una circunferencia de cualquier radio r : La medida en radianes de un ángulo θ es s/r , donde s es la longitud del arco circular que subtiende a θ en una circunferencia de radio r (vea Figura 10).

FIGURA 10 La medida de θ en radianes es el número de “radios” que pueden caber en un arco que subtienda a θ ; de aquí el término *radián*.



EJEMPLO 4 | Longitud de arco y medida de ángulo

- Encuentre la longitud de un arco de circunferencia con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30° .
- Un ángulo central θ de un círculo de radio 4 m está subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en radianes.

❗ La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mida en radianes.

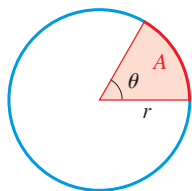


FIGURA 11

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

SOLUCIÓN

(a) Del Ejemplo 1(b) vemos que $30^\circ = \pi/6$ rad, por lo que la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}$$

(b) Por la fórmula $\theta = s/r$, tenemos

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ rad}$$

✍ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 55 Y 57

▼ **Área de un sector circular**

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área de todo el círculo (vea Figura 11). Entonces, el área de este sector es

$$\begin{aligned} A &= \frac{\theta}{2\pi} \times \text{área de círculo} \\ &= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta \end{aligned}$$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

En un círculo de radio r , el área A de un sector con ángulo central de θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

EJEMPLO 5 | Área de un sector

Encuentre el área de un sector de círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 metros.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula para el área de un sector circular, debemos hallar el ángulo central del sector en radianes: $60^\circ = 60(\pi/180)\text{rad} = \pi/3$ rad. Entonces, el área del sector es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ m}^2$$

❗ La fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mida en radianes.

✍ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 61

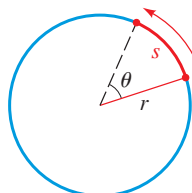


FIGURA 12

▼ **Movimiento circular**

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo como se ve en la Figura 12. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular. La **velocidad lineal** es la rapidez a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. La **velocidad angular** es la rapidez a la que el ángulo central θ está cambiando, de modo que la velocidad angular es el número de radianes que cambia este ángulo dividido entre el tiempo transcurrido.

El símbolo ω es la letra griega “omega”.



VELOCIDAD LINEAL Y VELOCIDAD ANGULAR

Suponga que un punto se mueve a lo largo de una circunferencia de radio r y el rayo desde el centro del círculo al punto recorre θ radianes en el tiempo t . Sea $s = r\theta$ la distancia que el punto se desplaza en el tiempo t . Entonces la velocidad del punto está dada por

$$\text{Velocidad angular } \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\text{Velocidad lineal } v = \frac{s}{t}$$

EJEMPLO 6 | Hallar velocidad lineal y angular

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo, a razón de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

SOLUCIÓN En 10 s, el ángulo θ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Por lo tanto, la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi \text{ rad}}{10 \text{ s}} = 3\pi \text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi = 30\pi$ pies. En consecuencia, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{30\pi \text{ pies}}{10 \text{ s}} = 3\pi \text{ pies/s}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 79

Observe que la velocidad angular *no* depende del radio de la circunferencia, sino sólo del ángulo θ . No obstante, si conocemos la velocidad angular ω y el radio r , podemos hallar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

RELACIÓN ENTRE VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR

Si un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r con velocidad angular ω , entonces su velocidad lineal v está dada por

$$v = r\omega$$

EJEMPLO 7 | Hallar velocidad lineal a partir de velocidad angular

Una mujer viaja en una bicicleta cuyas ruedas miden 26 pulgadas de diámetro. Si las ruedas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que ella viaja, en mi/h.

SOLUCIÓN La velocidad angular de las ruedas es $2\pi \cdot 125 = 250\pi$ rad/min. Como las ruedas tienen radio de 13 pulg. (la mitad del diámetro), la velocidad lineal es

$$v = r\omega = 13 \cdot 250\pi \approx 10,210.2 \text{ pulg./min}$$

Como hay 12 pulgadas por pie, 5280 pies por milla, y 60 minutos por hora, la velocidad de la mujer en millas por hora es

$$\begin{aligned} \frac{10,210.2 \text{ pulg./min} \times 60 \text{ min/h}}{12 \text{ pulg./pies} \times 5280 \text{ pies/mi}} &= \frac{612,612 \text{ pulg./h}}{63,360 \text{ pulg./mi}} \\ &\approx 9.7 \text{ mi/h} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 81

6.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- (a) La medida en radianes de un ángulo θ es la longitud del _____ que subtiende el ángulo en un círculo de radio _____.
(b) Para convertir grados a radianes, multiplicamos por _____.
(c) Para convertir radianes a grados, multiplicamos por _____.
- Un ángulo central θ se traza en una circunferencia de radio r .
(a) La longitud del arco subtendido por θ es $s =$ _____.
(b) El área del sector circular con ángulo central θ es $A =$ _____.

HABILIDADES

3-14 ■ Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida dada en grados.

- | | | |
|-----------------|------------------|-------------------|
| 3. 72° | 4. 54° | 5. -45° |
| 6. -60° | 7. -75° | 8. -300° |
| 9. 1080° | 10. 3960° | 11. 96° |
| 12. 15° | 13. 7.5° | 14. 202.5° |

15-26 ■ Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida dada en radianes.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| 15. $\frac{7\pi}{6}$ | 16. $\frac{11\pi}{3}$ | 17. $-\frac{5\pi}{4}$ |
| 18. $-\frac{3\pi}{2}$ | 19. 3 | 20. -2 |
| 21. -1.2 | 22. 3.4 | 23. $\frac{\pi}{10}$ |
| 24. $\frac{5\pi}{18}$ | 25. $-\frac{2\pi}{15}$ | 26. $-\frac{13\pi}{12}$ |

27-32 ■ Nos dan la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| 27. 50° | 28. 135° | 29. $\frac{3\pi}{4}$ |
| 30. $\frac{11\pi}{6}$ | 31. $-\frac{\pi}{4}$ | 32. -45° |

33-38 ■ Nos dan las medidas de dos ángulos en posición normal. Determine si los ángulos son coterminales.

- | | |
|--|---|
| 33. 70° , 430° | 34. -30° , 330° |
| 35. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ | 36. $\frac{32\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$ |
| 37. 155° , 875° | 38. 50° , 340° |

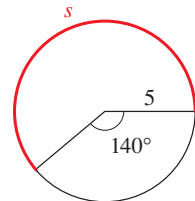
39-44 ■ Encuentre un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo dado.

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 39. 733° | 40. 361° | 41. 1110° |
| 42. -100° | 43. -800° | 44. 1270° |

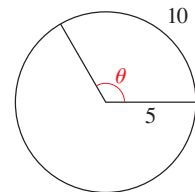
45-50 ■ Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con el ángulo dado.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 45. $\frac{17\pi}{6}$ | 46. $-\frac{7\pi}{3}$ | 47. 87π |
| 48. 10 | 49. $\frac{17\pi}{4}$ | 50. $\frac{51\pi}{2}$ |

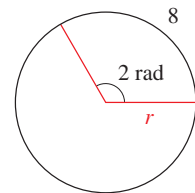
51. Encuentre la longitud del arc s de la figura.



52. Encuentre el ángulo θ de la figura.



53. Encuentre el radio r del círculo de la figura.



54. Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 metros.

55. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 rad en un círculo de radio 2 millas.

56. Un ángulo central θ en un círculo con radio de 5 m está subtendido por un arco de 6 m de longitud. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

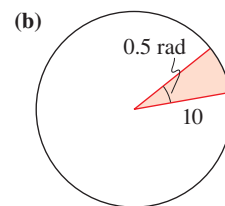
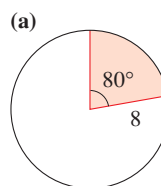
57. Un arco de 100 m de longitud subtiende un ángulo central θ en un círculo de 50 m de radio. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

58. Un arco circular de 3 pies de longitud subtiende un ángulo central de 25° . Encuentre el radio del círculo.

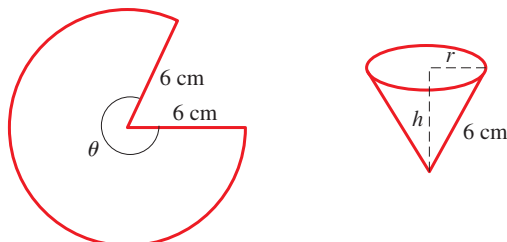
59. Encuentre el radio del círculo si un arco de 6 m de longitud del círculo subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

60. Encuentre el radio del círculo si un arco de 4 pies de longitud del círculo subtiende un ángulo central de 135° .

61. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.



(d) Encuentre el volumen de la taza.



88. Taza cónica En este ejercicio encontramos el volumen de la taza cónica del Ejercicio 87 para cualquier ángulo θ .

(a) Siga los pasos del Ejercicio 87 para demostrar que el volumen de la taza como función de θ es

$$V(\theta) = \frac{9}{\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$



(b) Grafique la función V .



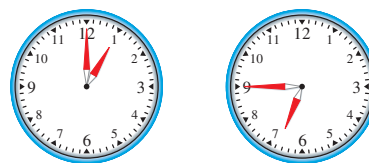
(c) ¿Para qué ángulo θ es máximo el volumen de la taza?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

89. Diferentes formas de medir ángulos La costumbre de medir ángulos usando grados, con 360° en un círculo, data de los antiguos babilonios, que usaban un sistema numérico basado en grupos de 60. Otro sistema de medir ángulos divide el círculo en 400 unidades, llamadas *grad*. En este sistema, un ángulo recto es de 100 grad, de modo que esto se ajusta a nuestro sistema numérico de base 10.

Escriba un corto ensayo que compare las ventajas y desventajas de estos dos sistemas y el sistema de medir ángulos en radianes. ¿Cuál sistema prefiere usted? ¿Por qué?

90. Relojes y ángulos En una hora, el minutero de un reloj se mueve todo un círculo completo, y la manecilla de las horas se mueve $\frac{1}{12}$ de círculo. ¿Cuántos radianes se mueven las manecillas del minutero y de las horas entre la 1:00 p.m. y las 6:45 p.m. (en el mismo día)?



6.2 TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Relaciones trigonométricas ► Triángulos especiales ► Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

En esta sección estudiamos ciertas relaciones entre los lados de triángulos rectángulos, llamadas relaciones trigonométricas, y damos varias aplicaciones.

▼ Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (vea Figura 1).

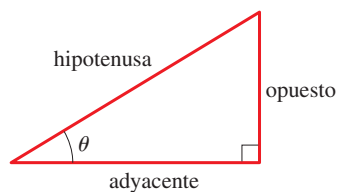


FIGURA 1

LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante**, **cotangente**. Como dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo θ son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea

HIPARCO (hacia el año 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para funciones estrechamente relacionadas con la función seno moderna, evaluadas para ángulos a intervalos de medio grado y consideradas las primeras tablas trigonométricas. Utilizó sus tablas principalmente para calcular las trayectorias de los planetas por los cielos.

el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ (vea Figura 2).

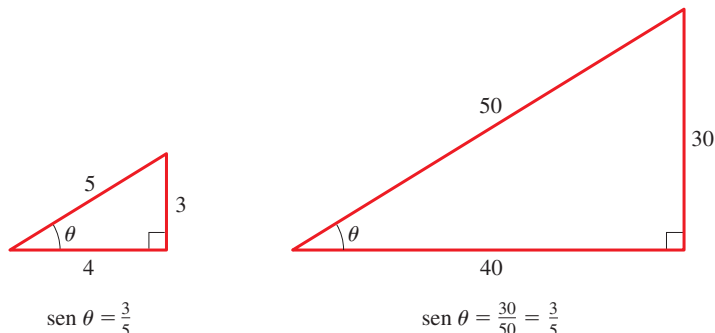


FIGURA 2

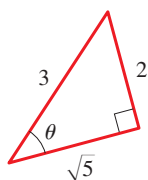


FIGURA 3

EJEMPLO 1 | Hallar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ de la Figura 3.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \theta &= \frac{2}{3} & \cos \theta &= \frac{\sqrt{5}}{3} & \tan \theta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\
 \csc \theta &= \frac{3}{2} & \sec \theta &= \frac{3}{\sqrt{5}} & \cot \theta &= \frac{\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

EJEMPLO 2 | Hallar relaciones trigonométricas

Si $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, trace un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α .

SOLUCIÓN Como $\cos \alpha$ está definido como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a α . Si el lado opuesto es x , entonces por el Teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. A continuación usamos el triángulo de la Figura 4 para hallar las relaciones.

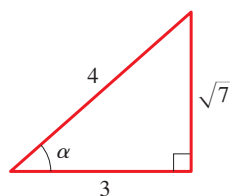


FIGURA 4

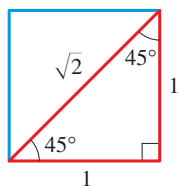
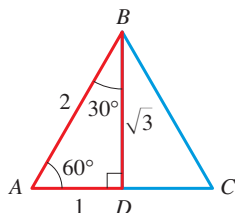
$$\begin{aligned}
 \text{sen } \alpha &= \frac{\sqrt{7}}{4} & \cos \alpha &= \frac{3}{4} & \tan \alpha &= \frac{\sqrt{7}}{3} \\
 \csc \alpha &= \frac{4}{\sqrt{7}} & \sec \alpha &= \frac{4}{3} & \cot \alpha &= \frac{3}{\sqrt{7}}
 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

▼ Triángulos especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del Teorema de Pitágoras. Los citados aquí en vista que se usan con frecuencia.

El primer triángulo se obtiene al trazar una diagonal en un cuadro de lado 1 (vea Figura 5). Por el Teorema de Pitágoras esta diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$. Los triángulos resultantes tienen ángulos de 45° , 45° y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, empezamos con un triángulo equilátero ABC de lado 2 y trazamos la bisectriz perpendicular DB de la base, como en la Figura 6. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de DB es $\sqrt{3}$. Como DB corta al ángulo ABC , obtenemos los triángulos con ángulos de 30° , 60° y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

**FIGURA 5****FIGURA 6**

Ahora podemos usar los triángulos especiales de las Figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30° , 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$) que aparecen en la Tabla 1.

TABLA 1

Valores de las relaciones trigonométricas para ángulos

θ en grados	θ en radianes	$\sen \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Es útil recordar estas relaciones trigonométricas especiales porque se presentan con frecuencia. Desde luego, pueden recordarse fácilmente si recordamos los triángulos de los que se obtienen.

Para hallar los valores de relaciones trigonométricas para otros ángulos, usamos calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) que se emplean para hallar las relaciones trigonométricas están programados directamente en calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se presiona la tecla **SIN**, la calculadora calcula una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras también dan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de éstas usando las siguientes *relaciones recíprocas*:

$$\csc t = \frac{1}{\sen t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Se debe verificar que estas relaciones se sigan inmediatamente de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

Seguimos la convención de que cuando escribimos $\sen t$, queremos decir el seno del ángulo cuya medida en radianes es t . Por ejemplo, $\sen 1$ significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Cuando se use calculadora para hallar un valor aproximado para este número, es necesario poner la calculadora en el modo de radianes; se encontrará que

$$\sen 1 \approx 0.841471$$

Si se desea hallar el seno del ángulo cuya medida es 1° , la calculadora se pone en el modo de grados; se encontrará que

$$\sen 1^\circ \approx 0.0174524$$

▼ Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

EJEMPLO 3 | Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo ABC que se muestra en la Figura 7.

Para una explicación de métodos numéricos, vea la nota al margen en la página 400.

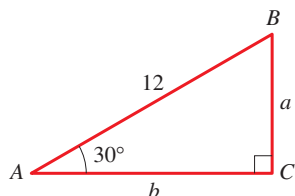


FIGURA 7

SOLUCIÓN Es evidente que $\angle B = 60^\circ$. Para hallar a , buscamos una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos que ya conocemos. En este caso, tenemos $\sin 30^\circ = a/12$, de modo que

$$a = 12 \sin 30^\circ = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Análogamente, $\cos 30^\circ = b/12$, entonces

$$b = 12 \cos 30^\circ = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

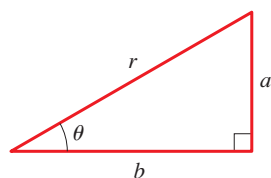


FIGURA 8

$$a = r \sin \theta$$

$$b = r \cos \theta$$

La Figura 8 muestra que si conocemos la hipotenusa r y el ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, entonces los catetos a y b están dados por

$$a = r \sin \theta \quad \text{y} \quad b = r \cos \theta$$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos en esta sección siempre comprenden triángulos rectos pero, como veremos en las siguientes tres secciones, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son rectángulos.

Para examinar los siguientes ejemplos, necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (Figura 9). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y de depresión se darán para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo un plano inclinado o una ladera, usamos el término **ángulo de inclinación**.

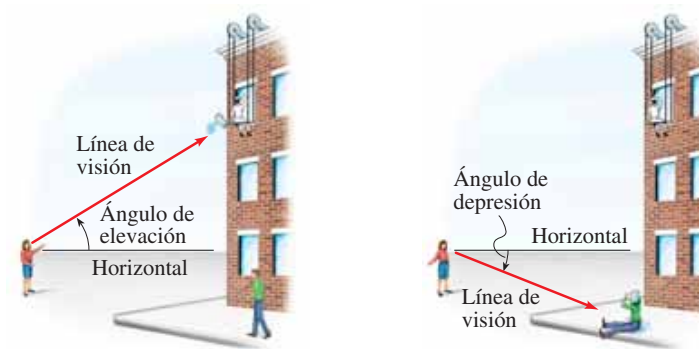


FIGURA 9

ARISTARCO DE SAMOS (310-230 a.C.) fue un afamado científico, músico, astrónomo y geómetra griego. En su libro *Sobre tamaños y distancias del Sol y la Luna*, estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, el triángulo formado por el Sol, la Luna y la Tierra tiene un ángulo recto en la Luna. Su método es semejante al descrito en el Ejercicio 61 de esta sección. Aristarco fue el primero en afirmar la teoría de que la Tierra y los planetas se mueven alrededor del Sol, idea que no fue aceptada por completo sino hasta después del tiempo de Copérnico, 1800 años después. Por esta razón Aristarco se conoce como el “Copérnico de la Antigüedad”.

El ejemplo siguiente nos da una importante aplicación de trigonometría al problema de mediciones: medimos la altura de un árbol alto sin tener que subir a él. Aun cuando el ejemplo es sencillo, el resultado es fundamental para entender la forma en que se aplican relaciones trigonométricas a problemas como éste.

EJEMPLO 4 | Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7° .

TALES DE MILETO (hacia 625-547 a.C.) es el legendario fundador de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su báculo con la de la columna. Usando propiedades de triángulos semejantes, afirmó que la relación entre la altura h de la columna y la altura h' de su báculo era igual a la relación entre la longitud s de la sombra de la columna y la longitud s' de la sombra de su báculo:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Como se conocen tres de estas cantidades, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales utilizó un método similar para hallar la altura de la Gran Pirámide de Egipto, hazaña que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que “aun cuando él [el rey de Egipto] le admiraba [a Tales] por otras cosas, en particular a él le gustaba la forma en que midió la altura de la pirámide sin ningún problema ni instrumentos”. El principio utilizado por Tales, el hecho de que las relaciones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, es la base de la trigonometría.



SOLUCIÓN Sea h la altura del árbol. De la Figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7^\circ \quad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7^\circ \quad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \quad \text{Use calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

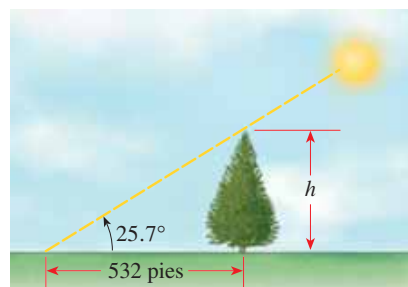


FIGURA 10

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47

EJEMPLO 5 | Un problema de triángulos rectángulos

Desde un punto en el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27° . Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.

SOLUCIÓN La Figura 11 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra en la misma forma en que hallamos la altura del árbol en el Ejemplo 4.

$$\frac{h}{500} = \tan 24^\circ \quad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24^\circ \quad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \quad \text{Use calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la altura de la astabandera, encontremos primero la altura desde el suelo a lo alto del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27^\circ$$

$$k = 500 \tan 27^\circ$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud de la astabandera, restamos h de k . Por lo tanto, la longitud del asta es aproximadamente $255 - 223 = 32$ pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 55

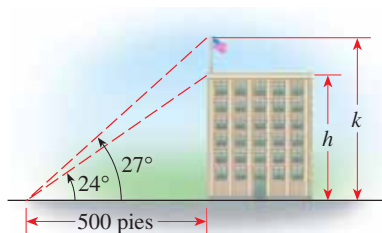
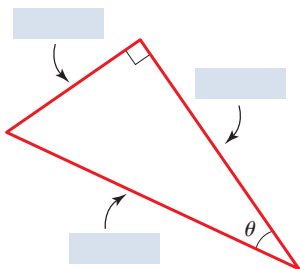


FIGURA 11

6.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. En la figura siguiente se ilustra un triángulo rectángulo con ángulo θ .



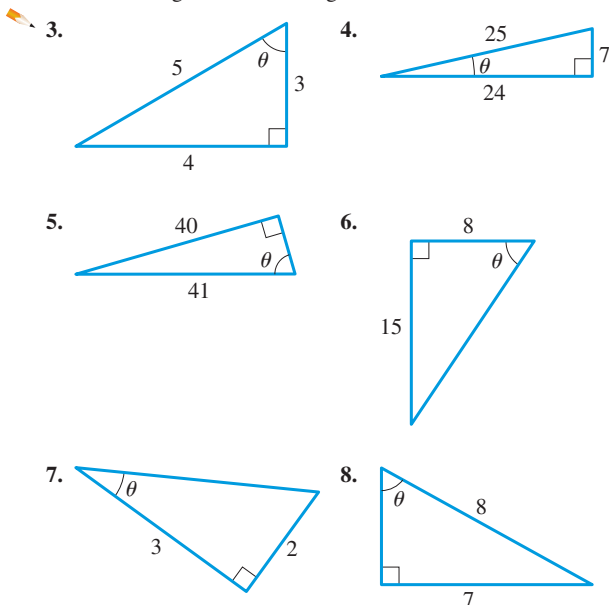
- (a) Aplique leyenda a los lados “opuesto” y “adyacente” a θ y la hipotenusa del triángulo.
- (b) Las funciones trigonométricas del ángulo θ están definidas como sigue:
- $$\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$
- (c) Las relaciones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo. Esto es porque todos los triángulos rectángulos con ángulo agudo θ son _____.

2. Las identidades recíprocas dicen que

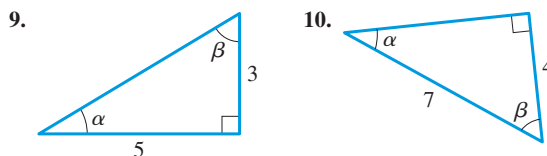
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

HABILIDADES

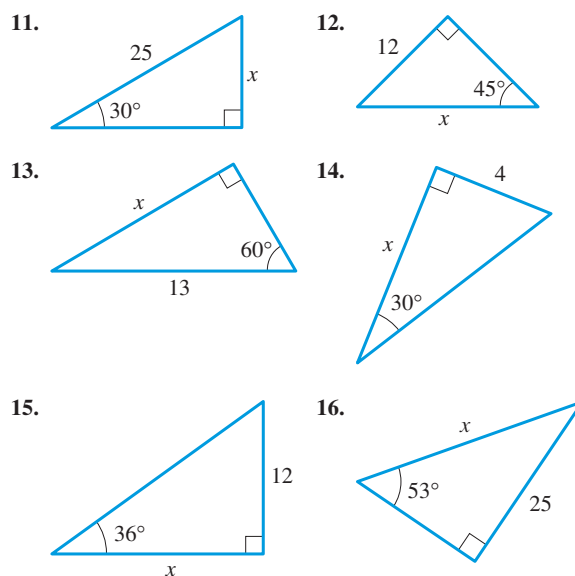
- 3-8 ■ Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo.



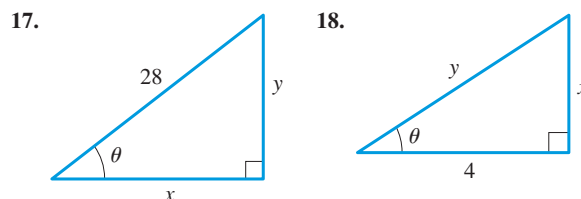
- 9-10 ■ Encuentre (a) $\sin \alpha$ y $\cos \beta$, (b) $\tan \alpha$ y $\cot \beta$, y (c) $\sec \alpha$ y $\csc \beta$.



- 11-16 ■ Encuentre el lado marcado como x . En los Ejercicios 13 y 14 exprese sus respuestas redondeadas a cinco lugares decimales.



- 17-18 ■ Exprese x y y en términos de relaciones trigonométricas de θ .



- 19-24 ■ Trace un triángulo que tenga ángulo agudo θ , y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ .

19. $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 20. $\cos \theta = \frac{9}{40}$
 21. $\cot \theta = 1$ 22. $\tan \theta = \sqrt{3}$
 23. $\sec \theta = \frac{7}{2}$ 24. $\csc \theta = \frac{13}{12}$

- 25-30 ■ Evalúe la expresión sin usar calculadora.

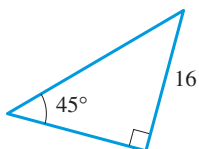
25. $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$
 26. $\sin 30^\circ \csc 30^\circ$
 27. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$
 28. $(\sin 60^\circ)^2 + (\cos 60^\circ)^2$

29. $(\cos 30^\circ)^2 - (\sin 30^\circ)^2$

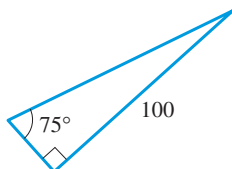
30. $\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \right)^2$

31-38 ■ Resuelva el triángulo rectángulo.

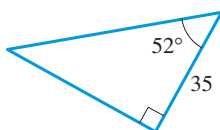
31.



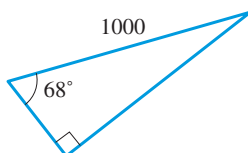
32.



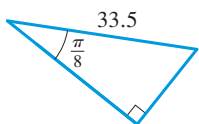
33.



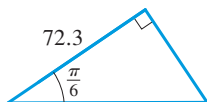
34.



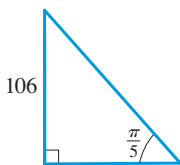
35.



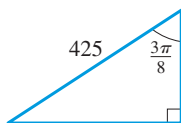
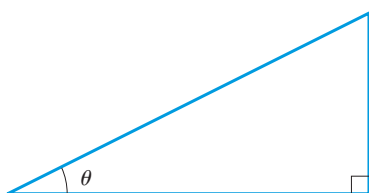
36.



37.

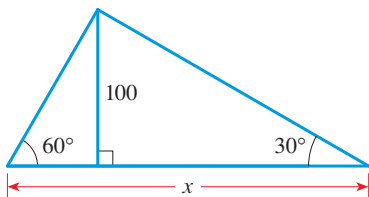


38.

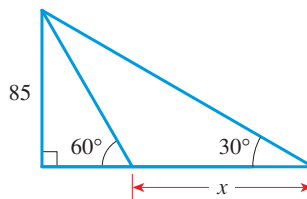

 39. Use una regla para medir cuidadosamente los lados del triángulo y, a continuación, use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de θ .

 40. Usando un transportador, trace un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo de 40° . Mida los lados con todo cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40° .

 41-44 ■ Encuentre x redondeada a un lugar decimal.

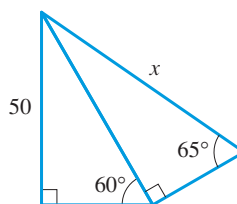
41.



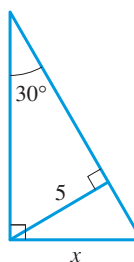
42.

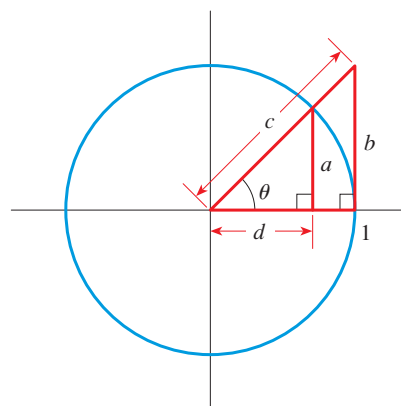


43.



44.


 45. Expresé la longitud x en términos de las relaciones trigonométricas de θ .

 46. Expresé la longitud a , b , c y d en la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ .


APLICACIONES

47. **Altura de un edificio** Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto del edificio Empire State de Nueva York es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1 milla de la base del edificio. Usando esta información, encuentre la altura del edificio Empire State.

48. Arco de Entrada Un avión está volando a la vista del Arco de Entrada (Gateway Arch) de St. Louis, Missouri, a una elevación de 35,000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el Gateway Arch; encuentra que el ángulo de depresión a un punto en el suelo abajo del arco es de 22° .

- (a) ¿Cuál es la distancia entre el avión y el arco?
(b) ¿Cuál es la distancia entre un punto en el suelo directamente bajo el avión y el arco?

49. Desviación de un rayo láser Un rayo láser ha de dirigirse hacia el centro de la Luna, pero el rayo se desvía 0.5° de su trayectoria propuesta.

- (a) ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su trayectoria propuesta cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas.)
(b) El radio de la Luna es aproximadamente de 1000 millas. ¿El rayo incidirá en la Luna?

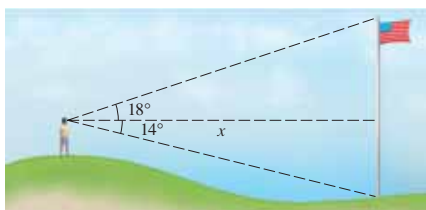
50. Distancia al mar Desde lo alto de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23° . ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

51. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72° . ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

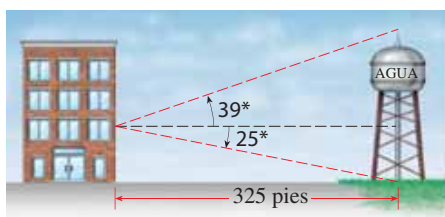
52. Altura de una torre Un cable de 600 pies para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

53. Elevación de una cometa Un hombre que está en una playa hace volar una cometa. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50° . Si la cuerda es de 450 pies de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

54. Determinación de una distancia Una mujer que está de pie en una colina observa una astabandera que ella sabe es de 60 pies de alto. El ángulo de depresión a la parte inferior del poste es de 14° y el ángulo de elevación de la parte superior del poste es de 18° . Encuentre la distancia x de la mujer al poste.



55. Altura de una torre Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio (vea la figura). Desde una ventana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25° . ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?



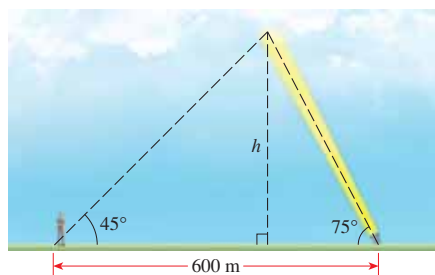
56. Determinar una distancia Un avión está volando a una elevación de 5150 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de depresión a un auto es 35° y al otro es de 52° . ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?

57. Determinar una distancia Si los dos autos del ejercicio 56 están en un lado del avión y si el ángulo de depresión a uno de los autos es 38° y al otro auto es 52° , ¿a qué distancia están entre sí los dos autos?

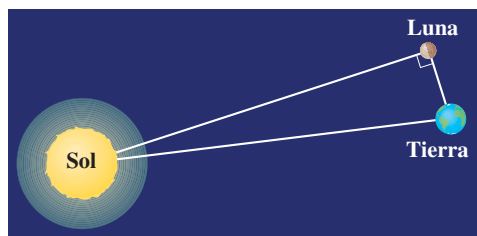
58. Altura de un globo Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, éstos simultáneamente miden el ángulo de depresión a dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, en el mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22° . ¿A qué altura está el globo?

59. Altura de una montaña Para estimar la altura de una montaña sobre una meseta, el ángulo de elevación a lo alto de la montaña se mide y es de 32° . A mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la meseta, se encuentra que el ángulo de elevación es de 35° . Estime la altura de la montaña.

60. Altura de una capa de nubes Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45° . Encuentre la altura h de la capa de nubes.



61. Distancia al Sol Cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (vea la figura). En ese momento el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna se mide y es de 89.85° . Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.



62. Distancia a la Luna Para hallar la distancia al Sol como en el Ejercicio 61, necesitamos conocer la distancia a la Luna. A continuación veamos una forma de estimar esa distancia: Cuando la Luna se ve en su cenit en un punto A en la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto B (vea la si-

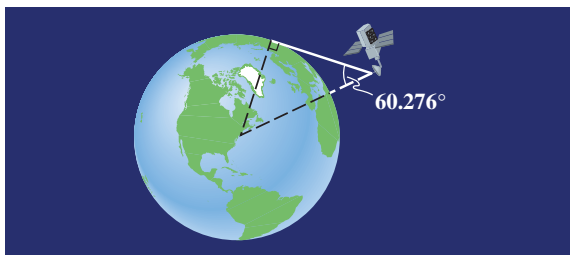
guiente figura). Los puntos A y B están a 6155 millas entre sí, y el radio de la Tierra es 3960 millas.

(a) Encuentre el ángulo θ en grados.

(b) Estime la distancia del punto A a la Luna.

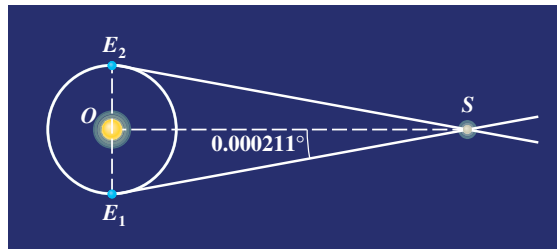


- 63. Radio de la Tierra** En el Ejercicio 74 de la Sección 6.1 se dio un método para hallar el radio de la Tierra. A continuación veamos un método más moderno: de un satélite que está a 600 millas de la Tierra, se observa que un ángulo formado por la vertical y la línea de vista al horizonte es 60.276° . Use esta información para hallar el radio de la Tierra.

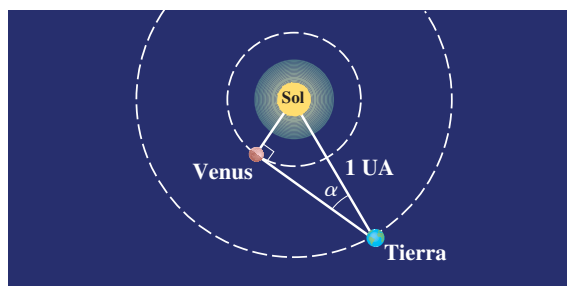


- 64. Paralaje** Para hallar la distancia a estrellas cercanas se usa el método de paralaje. La idea es hallar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para hacer esto, la estrella se observa en dos tiempos diferentes exactamente a 6 meses entre sí, y se registra su cambio aparente en posición. De estas dos observaciones, se puede calcular $\angle E_1SE_2$. (Los tiempos se escogen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea tan grande como sea posible, lo cual garantiza que $\angle E_1OS$ es 90° .) El ángulo E_1SO se llama *paralaje* de la estrella. Alfa Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211° .

Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como 9.3×10^7 millas.)



- 65. Distancia de Venus al Sol** La *elongación* α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Cuando Venus alcanza su máxima elongación de 46.3° , la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 66. Triángulos semejantes** Si dos triángulos son semejantes, ¿qué propiedades comparten? Explique la forma en que estas propiedades hacen posible definir las relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

APÉNDICE

Temas complementarios



FUNDAMENTOS

- 1.1 Números reales
- 1.2 Exponentes y radicales
- 1.3 Expresiones algebraicas
- 1.4 Expresiones racionales
- 1.5 Ecuaciones
- 1.6 Modelado con ecuaciones
- 1.7 Desigualdades
- 1.8 Geometría de coordenadas
- 1.9 Calculadoras graficadoras;
resolución gráfica de
ecuaciones y desigualdades
- 1.10 Rectas
- 1.11 Modelos con el uso de
variaciones

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste lineal de datos

En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan \$9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga y por trabajar x horas mediante la ecuación $y = 9x$. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación $y = 9x$ en un *plano coordenado* nos ayuda a “ver” cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

1.1 NÚMEROS REALES

Propiedades de los números reales ► Adición y sustracción ► Multiplicación y división ► La recta de números reales ► Conjuntos e intervalos ► Valor absoluto y distancia

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como “medio galón de leche,” y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{7} \quad 46 = \frac{46}{1} \quad 0.17 = \frac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales**. Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \quad \sqrt{5} \quad \sqrt[3]{2} \quad \pi \quad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir “número real”. La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

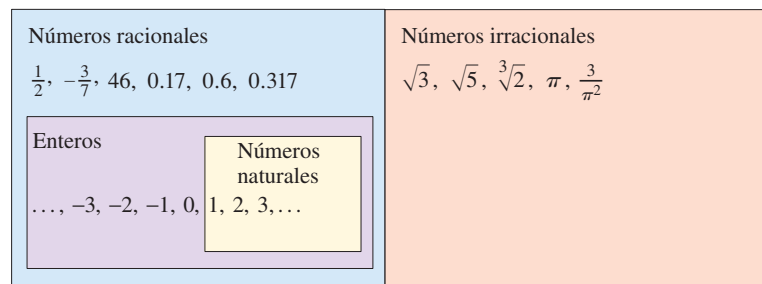


FIGURA 1 El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747 \dots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{array}{r} 1000x = 3547.47474747 \dots \\ 10x = 35.47474747 \dots \\ \hline 990x = 3512.0 \end{array}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\frac{1}{2} = 0.5000 \dots = 0.5\overline{0}$$

$$\frac{2}{3} = 0.66666 \dots = 0.\overline{6}$$

$$\frac{157}{495} = 0.3171717 \dots = 0.31\overline{7}$$

$$\frac{9}{7} = 1.285714285714 \dots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$$

$$\pi = 3.141592653589793 \dots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ se lee “es aproximadamente igual a”. Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

▼ **Propiedades de los números reales**

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, “ $a + b = b + a$ ” es una forma concisa de decir que “cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa”. Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES		
Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.
$(b + c)a = ab + ac$	$(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales a , b y c .

La Propiedad Distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

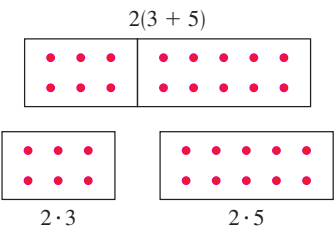


FIGURA 2 La Propiedad Distributiva

EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 2(x + 3) &= 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Propiedad Distributiva

Simplifique

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (a + b)(x + y) &= (a + b)x + (a + b)y \\ &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= ax + bx + ay + by \end{aligned}$$

Propiedad Distributiva

Propiedad Distributiva

Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11

 No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a . Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (Propiedad 2), un número positivo.

Adición y sustracción

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a . Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS**Propiedad****Ejemplo**

1. $(-1)a = -a$

$(-1)5 = -5$

2. $-(-a) = a$

$-(-5) = 5$

3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$

4. $(-a)(-b) = ab$

$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$

5. $-(a + b) = -a - b$

$-(3 + 5) = -3 - 5$

6. $-(a - b) = b - a$

$-(5 - 8) = 8 - 5$

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sea x , y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$

Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad -(x + y - z) &= -x - y - (-z) \\ &= -x - y + z \end{aligned}$$

Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$ Propiedad 2: $-(-a) = a$ **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23**

▼ Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a . Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b . Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b ; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Para multiplicar fracciones , multiplique numeradores y denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Para dividir fracciones , multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Para sumar fracciones con el mismo denominador, sume los numeradores .
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Para sumar fracciones con denominadores diferentes , encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Cancele números que sean factores comunes en numerador y denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Multiplicación cruzada.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador (MCD)** que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} && \text{Use común denominador} \\ &= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} && \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}\end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 25

▼ La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O , llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama **coordenada de P** y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

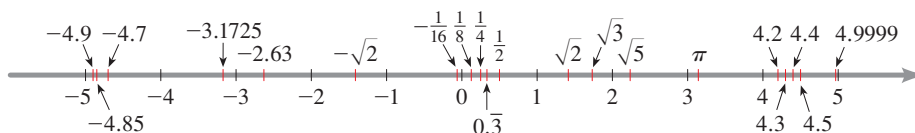


FIGURA 3 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que **a es menor que b** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que **b es mayor que a** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee “ a es menor o igual a b ”. Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \quad -\pi < -3 \quad \sqrt{2} < 2 \quad 2 \leq 2$$

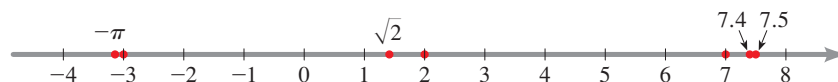


FIGURA 4

▼ Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S , y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S . Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee “ A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$ ”.

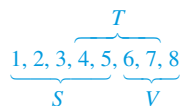
Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S o T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en S y T . En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T . El **conjunto vacío**, denotado por $\emptyset$, es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN



$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{Todos los elementos en } S \text{ o } T$$

$$S \cap T = \{4, 5\} \quad \text{Elementos comunes a } S \text{ y } T$$

$$S \cap V = \emptyset \quad S \text{ y } V \text{ no tienen elementos en común}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39



FIGURA 5 El intervalo abierto (a, b)



FIGURA 5 El intervalo cerrado $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geoméricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a, b) . El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Nótese que los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares $[]$ y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞) , por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

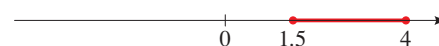
EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Expresar cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, graficar el intervalo.

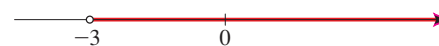
(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$



(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$



(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.

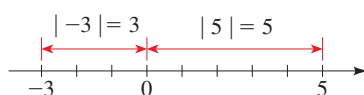
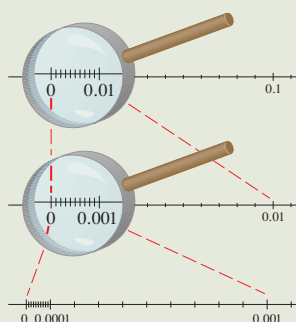


FIGURA 9

EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

- (a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ (b) $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

- (a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

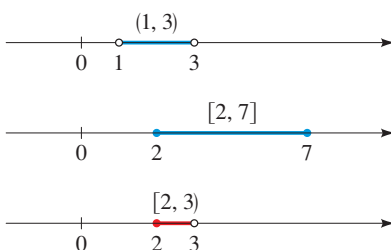
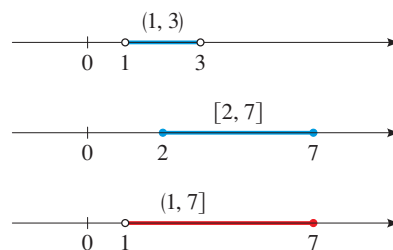
$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 2 \leq x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

- (b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 1 < x \leq 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

FIGURA 7 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$ FIGURA 8 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 59

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a , denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \geq 0$ para todo número a . Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

- (a) $|3| = 3$
 (b) $|-3| = -(-3) = 3$
 (c) $|0| = 0$
 (d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $ a \geq 0$	$ -3 = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2. $ a = -a $	$ 5 = -5 $	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $ ab = a b $	$ -2 \cdot 5 = -2 5 $	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$	$\left \frac{12}{-3}\right = \frac{ 12 }{ -3 }$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11 ? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $|11 - (-2)| = 13$ o $|(-2) - 11| = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

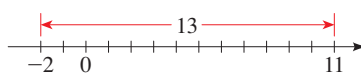


FIGURA 10

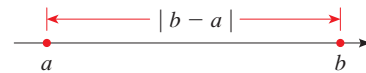


FIGURA 11 La longitud de un segmento de recta es $|b - a|$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$|b - a| = |a - b|$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma distancia de b a a .

EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geoméricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

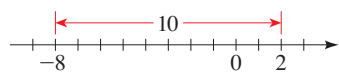


FIGURA 12

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 73**

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- Dé un ejemplo de:
 - Un número natural
 - Un entero que no sea número natural
 - Un número racional que no sea entero
 - Un número irracional
- Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.
 - $ab =$ _____; _____ Propiedad
 - $a + (b + c) =$ _____; _____ Propiedad
 - $a(b + c) =$ _____; _____ Propiedad
- El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:
 _____ en notación constructiva de conjuntos y
 _____ en notación de intervalos.
- El símbolo $|x|$ representa la _____ del número x . Si x no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre _____.

HABILIDADES

5-6 ■ Mencione los elementos del conjunto dado que sean

- números naturales
- números enteros
- números racionales
- números irracionales

- $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\bar{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$
- $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

7-14 ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

- $7 + 10 = 10 + 7$
- $2(3 + 5) = (3 + 5)2$
- $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$
- $2(A + B) = 2A + 2B$
- $(5x + 1)3 = 15x + 3$
- $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$
- $2x(3 + y) = (3 + y)2x$
- $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

15-18 ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

- Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$ _____
- Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ _____
- Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$ _____
- Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$ _____

19-24 ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

- $3(x + y)$
- $4(2m)$
- $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$
- $(a - b)8$
- $\frac{4}{3}(-6y)$
- $(3a)(b + c - 2d)$

25-30 ■ Ejecute las operaciones indicadas.

- $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$
- $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$
- $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$
- $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$
- $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$
- $\frac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$
- $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
- $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$
- $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$
- $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$
- $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$
- $\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

31-32 ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

- (a) $3 \frac{7}{2}$ (b) $-3 \frac{7}{2}$ (c) $3.5 \frac{7}{2}$
- (a) $\frac{2}{3} \frac{0.67}{3}$ (b) $\frac{2}{3} \frac{-0.67}{3}$ (c) $|0.67| \frac{-0.67}{3}$

33-36 ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

- (a) $-6 < -10$ (b) $\sqrt{2} > 1.41$
- (a) $\frac{10}{11} < \frac{12}{13}$ (b) $-\frac{1}{2} < -1$
- (a) $-\pi > -3$ (b) $8 \leq 9$
- (a) $1.1 > 1.\bar{1}$ (b) $8 \leq 8$

37-38 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

- (a) x es positivo
 (b) t es menor a 4
 (c) a es mayor o igual a π
 (d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a -5
 (e) La distancia de p a 3 es como máximo 5

- (a) y es negativa
 (b) z es mayor a 1
 (c) b es como máximo 8
 (d) w es positiva y menor o igual a 17
 (e) y está al menos 2 unidades de π

39-42 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \\ C = \{7, 8, 9, 10\}$$

- (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$
- (a) $B \cup C$ (b) $B \cap C$
- (a) $A \cup C$ (b) $A \cap C$
- (a) $A \cup B \cup C$ (b) $A \cap B \cap C$

43-44 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \quad B = \{x \mid x < 4\}$$

$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

43. (a) $B \cup C$ (b) $B \cap C$

44. (a) $A \cap C$ (b) $A \cap B$

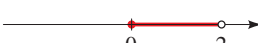
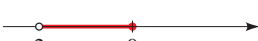
45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

- 45.** $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$
47. $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$
49. $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

- 51.** $x \leq 1$ **52.** $1 \leq x \leq 2$
53. $-2 < x \leq 1$ **54.** $x \geq -5$
55. $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

57-58 ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

- 57.** (a) 
 (b) 
58. (a) 
 (b) 

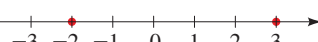
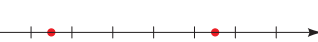
59-64 ■ Grafique el conjunto.

- 59.** $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$
61. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$
63. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

- 65.** (a) $|100|$ (b) $|-73|$
66. (a) $|\sqrt{5} - 5|$ (b) $|10 - \pi|$
67. (a) $||-6| - |-4||$ (b) $\frac{-1}{|-1|}$
68. (a) $|2 - |-12||$ (b) $-1 - |1 - |-1||$
69. (a) $|(-2) \cdot 6|$ (b) $|(-\frac{1}{3})(-15)|$
70. (a) $\left|\frac{-6}{24}\right|$ (b) $\left|\frac{7-12}{12-7}\right|$

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

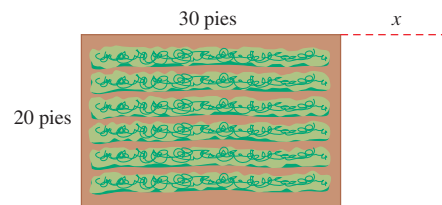
- 71.** 
72. 
73. (a) $2y + 17$ (b) $-3y + 21$ (c) $\frac{11}{8}y - \frac{3}{10}$
74. (a) $\frac{7}{13}y - \frac{1}{21}$ (b) $-38y - 57$ (c) $-2.6y - 1.8$

75-76 ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

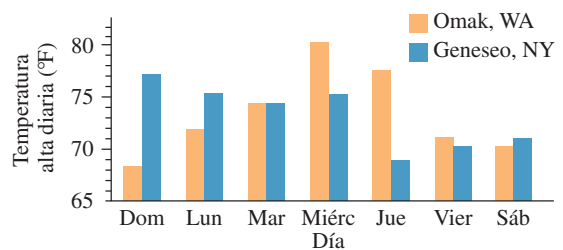
- 75.** (a) $0.\overline{7}$ (b) $0.2\overline{8}$ (c) $0.5\overline{7}$
76. (a) $5.\overline{23}$ (b) $1.3\overline{7}$ (c) $2.1\overline{35}$

APLICACIONES

77. Área de un jardín El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



78. Variación de temperatura La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

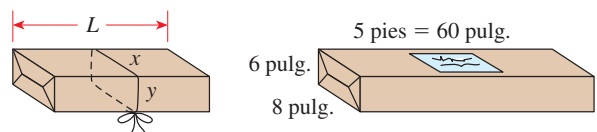


79. Envío de un paquete por correo La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

(a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

(b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

80. Signos de números Sean a , b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

- (a) $-a$ (b) $-b$ (c) bc
 (d) $a - b$ (e) $c - a$ (f) $a + bc$
 (g) $ab + ac$ (h) $-abc$ (i) ab^2

81. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

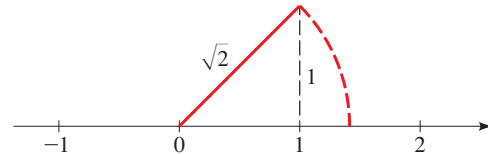
82. Combinación de números racionales con números irracionales ¿ $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿ $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

83. Limitación del comportamiento de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x crece? ¿Y cuando x disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

84. Números irracionales y geometría Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.



85. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

- (a) ¿La sustracción es conmutativa?
 (b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ► Reglas para trabajar con exponentes ► Notación científica ► Radicales ► Exponentes racionales
 ► Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n .

▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3 . En general, tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n -ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

 Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4 . En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3 , pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

EJEMPLO 1 | Notación exponencial

- (a) $(\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$
 (b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
 (c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos 5^4 por 5^2 :

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}} \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes*. En general, para cualquier número real a y cualesquier enteros positivos m y n , tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando m y n fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

EJEMPLO 2 | Exponentes cero y negativos

- (a) $(\frac{4}{7})^0 = 1$
 (b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$
 (c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

 AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 17

▼ Reglas para trabajar con exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3 Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}^n \\
 &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ grupos de factores}} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}
 \end{aligned}$$

Los casos para los que $m \leq 0$ o $n \leq 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4 Si n es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las Propiedades Conmutativa y Asociativa. Si $n \leq 0$, la Ley 4 se puede demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar las Leyes 2 y 5.

EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

(a) $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(c) $\frac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(d) $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

(e) $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$

(f) $\left(\frac{x}{2}\right)^5 = \frac{x^5}{2^5} = \frac{x^5}{32}$ Ley 5: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 35, 37 Y 39** ■

EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

$$(a) (2a^3b^2)(3ab^4)^3 \quad (b) \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 (a) \quad (2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^n b^n \\
 &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn} \\
 &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupe factores de la misma base} \\
 &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^m a^n = a^{m+n} \\
 (b) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3} \frac{(y^2)^4 x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4} \\
 &= \frac{x^3}{y^3} \frac{y^8 x^4}{z^4} && \text{Ley 3} \\
 &= (x^3 x^4) \left(\frac{y^8}{y^3}\right) \frac{1}{z^4} && \text{Agrupe factores de la misma base} \\
 &= \frac{x^7 y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}
 \end{aligned}$$

 **AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 43 Y 47**

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7 Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar la Ley 6.

EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

$$(a) \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} \quad (b) \left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Aun cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, describiremos con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

SOLUCIÓN

- (a) Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6s^2}{2t^2t^4} \quad \text{Ley 7}$$

t^{-4} pasa al denominador y se convierte en t^4

$$= \frac{3s^2}{t^6} \quad \text{Ley 1}$$

s^{-2} pasa al numerador y se convierte en s^2

- (b) Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \quad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \quad \text{Leyes 5 y 4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 49

Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.000000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica*.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la derecha:

$$4 \times 10^{13} = 40,000,000,000,000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la izquierda:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.000000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

EJEMPLO 6 | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

- (a) 56,920 (b) 0.000093

SOLUCIÓN

$$(a) \underbrace{56,920}_{4 \text{ lugares}} = 5.692 \times 10^4 \qquad (b) \underbrace{0.000093}_{5 \text{ lugares}} = 9.3 \times 10^{-5}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 77 Y 79

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada **EE** o **EXP** o **EE** para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, ingresamos

$$3.629 \quad \boxed{2ND} \quad \boxed{EE} \quad 15$$

y en la pantalla se lee

$$3.629E15$$

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

$$\boxed{1.234568 \ 12} \quad \text{o} \quad \boxed{1.23468 \ E12}$$

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

EJEMPLO 7 | Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use calculadora para aproximar el cociente ab/c .

SOLUCIÓN Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36} \end{aligned}$$

En el Apéndice *Cálculo de cifras significativas* vea guías para trabajar con cifras significativas.

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 83 Y 85**▼ Radicales**

Sabemos lo que 2^n significa siempre que n sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa “la raíz positiva de”. Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3 , pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada positiva de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3 .

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n . La raíz n de x es el número que, cuando se eleva a la n potencia, dará x .

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ n

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz n principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que } b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81} &= 3 & \text{porque } 3^4 &= 81 & \text{y } 3 &\geq 0 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2 & \text{porque } (-2)^3 &= -8 \end{aligned}$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{pero} \quad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces n se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

PROPIEDADES DE RAÍCES n

Propiedad

Ejemplo

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$4. \sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$5. \sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces n

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sqrt[3]{x^4} &= \sqrt[3]{x^3 x} && \text{Factorice el cubo más grande} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} \\ &= x \sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81} \sqrt[4]{x^8} \sqrt[4]{y^4} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{c} \\ &= 3 \sqrt[4]{(x^2)^4} |y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a| \\ &= 3x^2 |y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|, |x^2| = x^2 \end{aligned}$$

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

 Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} \\ &= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2} \end{aligned}$$

Factorice los cuadrados más grandes

Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Propiedad Distributiva

(b) Si $b > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{25b} - \sqrt{b^3} &= \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b} \\ &= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b} \\ &= (5 - b)\sqrt{b} \end{aligned}$$

Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Propiedad 5, $b > 0$

Propiedad Distributiva

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 33

▼ Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz n ,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales*.

EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

$$\text{(a)} \quad 4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{(b)} \quad 8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4 \quad \text{Solución alternativa: } 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{(c)} \quad 125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5} \quad \text{(d)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 21 Y 23

DIOFANTO Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra donde da métodos para hallar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (vea página 99) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora, fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma} \alpha \varsigma \eta \eta \Delta^{\gamma} \zeta \overset{\circ}{M} \epsilon \nu^{\sigma} \kappa \delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

- (a) $a^{1/3} a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
- (b) $\frac{a^{2/5} a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5 + 7/5 - 3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- (c) $(2a^3 b^4)^{3/2} = 2^{3/2} (a^3)^{3/2} (b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$
 $= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$
 $= 2\sqrt{2} a^{9/2} b^6$
- (d) $\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\frac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \frac{2^3 (x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \cdot (y^4 x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7
 $= \frac{8x^{9/4}}{y} \cdot y^4 x^{1/2}$ Ley 3
 $= 8x^{11/4} y^3$ Leyes 1 y 2

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 61, 63, 67 Y 69

EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

- (a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales
 $= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1
- (b) $\sqrt{x}\sqrt{x} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales
 $= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1
 $= x^{3/4}$ Ley 3

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 71 Y 75

▼ Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$(b) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$(c) \sqrt[7]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 89 Y 91

1.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

- (a) Usando notación exponencial, podemos escribir el producto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ como _____.
(b) En la expresión 3^4 , el número 3 se denomina _____, y el número 4 se llama _____.
- (a) Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, _____ los exponentes. Por tanto, $3^4 \cdot 3^5 =$ _____.
(b) Cuando dividimos dos potencias con la misma base, _____ los exponentes. Por tanto, $\frac{3^5}{3^2} =$ _____.
- (a) Usando notación exponencial, podemos escribir $\sqrt[3]{5}$ como _____.
(b) Usando radicales, podemos escribir $5^{1/2}$ como _____.
(c) ¿Hay diferencia entre $\sqrt{5^2}$ y $(\sqrt{5})^2$? Explique.
- Explique qué significa $4^{3/2}$ y, a continuación, calcule $4^{3/2}$ en dos formas diferentes:
 $(4^{1/2})^3 =$ _____ o $(4^3)^{1/2} =$ _____
- Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar $\frac{1}{\sqrt{3}}$:
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
- Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo:
 $5^{1/3} \cdot 5^{\square} = 5.$

HABILIDADES

7-14 ■ Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

	Expresión radical	Expresión exponencial
7.	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
8.	$\sqrt[3]{7^2}$	
9.		$4^{2/3}$
10.		$11^{-3/2}$
11.	$\sqrt[5]{5^3}$	
12.		$2^{-1.5}$

	Expresión radical	Expresión exponencial
--	-------------------	-----------------------

13. $a^{2/5}$

14. $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$

15-24 ■ Evalúe cada expresión.

- | | | |
|--|---|--|
|  15. (a) -3^2 | (b) $(-3)^2$ | (c) $(\frac{1}{3})^4(-3)^2$ |
| 16. (a) $5^4 \cdot 5^{-2}$ | (b) $\frac{10^7}{10^4}$ | (c) $\frac{3}{3^{-2}}$ |
|  17. (a) $(\frac{2}{3})^0 2^{-1}$ | (b) $\frac{2^{-3}}{3^0}$ | (c) $(\frac{1}{4})^{-2}$ |
| 18. (a) $(-\frac{2}{3})^{-3}$ | (b) $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ | (c) $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$ |
| 19. (a) $\sqrt{16}$ | (b) $\sqrt[4]{16}$ | (c) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ |
| 20. (a) $\sqrt{64}$ | (b) $\sqrt[3]{-64}$ | (c) $\sqrt[5]{-32}$ |
|  21. (a) $\sqrt[4]{9}$ | (b) $\sqrt[4]{256}$ | (c) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ |
| 22. (a) $\sqrt{7}\sqrt{28}$ | (b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ | (c) $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$ |
|  23. (a) $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ | (b) $(-32)^{2/5}$ | (c) $-32^{2/5}$ |
| 24. (a) $1024^{-0.1}$ | (b) $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ | (c) $(\frac{25}{64})^{-3/2}$ |

25-28 ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

- | | |
|---|--------------------------------|
| 25. $\sqrt{x^2 + y^2}$ | 26. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$ |
| 27. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$ | 28. $(xy)^{2z}$ |

29-34 ■ Simplifique la expresión.

- | | |
|---|------------------------------------|
|  29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ | 30. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$ |
| 31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$ | 32. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$ |
|  33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$ | 34. $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$ |

35-40 ■ Simplifique cada expresión.

- | | | |
|--|--------------------------|----------------------------|
|  35. (a) $x^8 x^2$ | (b) $(3y^2)(4y^5)$ | (c) $x^2 x^{-6}$ |
| 36. (a) $x^{-5} x^3$ | (b) $w^{-2} w^{-4} w^6$ | (c) $z^5 z^{-3} z^{-4}$ |
|  37. (a) $\frac{y^{10} y^0}{y^7}$ | (b) $\frac{x^6}{x^{10}}$ | (c) $\frac{a^9 a^{-2}}{a}$ |
| 38. (a) $\frac{z^2 z^4}{z^3 z^{-1}}$ | (b) $(2y^2)^3$ | (c) $(8x)^2$ |

39. (a) $(a^2a^4)^3$ (b) $\left(\frac{a^2}{4}\right)^3$ (c) $(3z)^2(6z^2)^{-3}$

40. (a) $(2z^2)^{-5}z^{10}$ (b) $(2a^3a^2)^4$ (c) $\left(\frac{3x^4}{4x^2}\right)^2$

41-52 ■ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente(s) negativo(s).

41. (a) $(4x^2y^4)(2x^5y)$ (b) $(8a^2z)\left(\frac{1}{2}a^3z^4\right)$

42. (a) $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-5})$ (b) $(2s^3t^{-2})\left(\frac{1}{3}s^7t\right)(16t^4)$

43. (a) $(5x^2y^3)(3x^2y^5)^4$ (b) $(2a^3b^2)^2(5a^2b^5)^3$

44. (a) $(s^{-2}t^2)^2(s^2t)^3$ (b) $(2u^2v^3)^3(3u^{-3}v)^2$

45. (a) $\frac{6y^3z}{2yz^2}$ (b) $\frac{(xy^2z^3)^4}{(x^2y^2z)^3}$

46. (a) $\frac{2x^3y^4}{x^5y^3}$ (b) $\frac{(2v^3w)^2}{v^3w^2}$

47. (a) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^5\left(\frac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ (b) $\frac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

48. (a) $\left(\frac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\frac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ (b) $\frac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

49. (a) $\frac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ (b) $\left(\frac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

50. (a) $\frac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ (b) $\left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

51. (a) $\left(\frac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ (b) $\left(\frac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

52. (a) $\left(\frac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)$ (b) $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

53-60 ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras denotan cualesquier números reales.

53. $\sqrt[4]{x^4}$ 54. $\sqrt[5]{x^{10}}$

55. $\sqrt[4]{16x^8}$ 56. $\sqrt[3]{x^3y^6}$

57. $\sqrt[6]{64a^6b^7}$ 58. $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

59. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ 60. $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

61-70 ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

61. (a) $x^{3/4}x^{5/4}$ (b) $y^{2/3}y^{4/3}$

62. (a) $(4b)^{1/2}(8b^{1/4})$ (b) $(3a^{3/4})^2(5a^{1/2})$

63. (a) $\frac{w^{4/3}w^{2/3}}{w^{1/3}}$ (b) $\frac{s^{5/2}(2s^{5/4})^2}{s^{1/2}}$

64. (a) $(8y^3)^{-2/3}$ (b) $(u^4v^6)^{-1/3}$

65. (a) $(8a^6b^{3/2})^{2/3}$ (b) $(4a^6b^8)^{3/2}$

66. (a) $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$ (b) $(2x^3y^{-1/4})^2(8y^{-3/2})^{-1/3}$

67. (a) $\frac{(8s^3t^3)^{2/3}}{(s^4t^{-8})^{1/4}}$ (b) $\frac{(32y^{-5}z^{10})^{1/5}}{(64y^6z^{-12})^{-1/6}}$

68. (a) $\left(\frac{x^8y^{-4}}{16y^{4/3}}\right)^{-1/4}$ (b) $\left(\frac{-8y^{3/4}}{y^3z^6}\right)^{-1/3}$

69. (a) $\left(\frac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\frac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$ (b) $\left(\frac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2\left(\frac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3}$

70. (a) $\left(\frac{a^{1/6}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3\left(\frac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$ (b) $\frac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}\left(\frac{3s^{-2}}{4t^{1/3}}\right)^{-1}$

71-76 ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

71. (a) $\sqrt[6]{y^5}\sqrt[3]{y^2}$ (b) $(5\sqrt[3]{x})(2\sqrt[4]{x})$

72. (a) $\sqrt[4]{b^3}\sqrt{b}$ (b) $(2\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2})$

73. (a) $\sqrt{4st^3}\sqrt[6]{s^3t^2}$ (b) $\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}$

74. (a) $\sqrt[5]{x^3y^2}\sqrt[10]{x^4y^{16}}$ (b) $\frac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt{x}}$

75. (a) $\sqrt[3]{y}\sqrt{y}$ (b) $\sqrt{\frac{16u^3v}{uw^5}}$

76. (a) $\sqrt{s}\sqrt{s^3}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

77-78 ■ Escriba cada número en notación científica.

77. (a) 69,300,000 (b) 7,200,000,000,000

(c) 0.000028536 (d) 0.0001213

78. (a) 129,540,000 (b) 7,259,000,000

(c) 0.0000000014 (d) 0.0007029

79-80 ■ Escriba cada número en notación decimal.

79. (a) 3.19×10^5 (b) 2.721×10^8

(c) 2.670×10^{-8} (d) 9.999×10^{-9}

80. (a) 7.1×10^{14} (b) 6×10^{12}

(c) 8.55×10^{-3} (d) 6.257×10^{-10}

81-82 ■ Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

81. (a) Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5,900,000,000,000 millas.
- (b) El diámetro de un electrón alrededor de 0.000000000004 centímetros.
- (c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.
82. (a) La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.
- (b) La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0.000000000000000000053 g.
- (c) La masa de la Tierra es de unos 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg.

83-88 ■ Use notación científica, las Leyes de Exponentes, y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Expresé su respuesta redondeada al número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

83. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

84. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

85. $\frac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

86. $\frac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

87. $\frac{(0.0000162)(0.01582)}{(594,621,000)(0.0058)}$

88. $\frac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

89-92 ■ Racionalice el denominador.

89. (a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\sqrt{\frac{2}{x}}$ (c) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

90. (a) $\sqrt{\frac{5}{12}}$ (b) $\sqrt{\frac{x}{6}}$ (c) $\sqrt{\frac{y}{2z}}$

91. (a) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ (c) $\frac{x}{y^{2/5}}$

92. (a) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$ (b) $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ (c) $\frac{1}{c^{3/7}}$

93. Sean a , b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

(a) b^5 (b) b^{10} (c) ab^2c^3

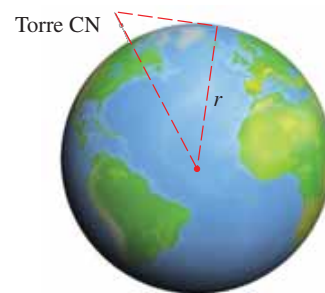
(d) $(b-a)^3$ (e) $(b-a)^4$ (f) $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$

94. Demuestre las Leyes de Exponentes dadas para el caso en que m y n sean enteros positivos y $m > n$.

(a) Ley 2 (b) Ley 5 (c) Ley 6

APLICACIONES95. **Distancia a la estrella más cercana** Próxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del Ejercicio 81(a) para expresar esta distancia en millas.96. **Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de unas 186,000 mi/s. Use la información del Ejercicio 82(a) para hallar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.97. **Volumen de los océanos** El promedio de profundidad de los océanos es 3.7×10^3 m y el área de los océanos es 3.6×10^{14} m². ¿Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)98. **Deuda nacional** Al mes de julio de 2010, la población de Estados Unidos era de 3.070×10^8 , y la deuda nacional era de 1.320×10^{13} dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?99. **Número de moléculas** Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22.4 L de cualquier gas contienen 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?100. **¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura h se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1135 pies sobre el suelo?101. **Rapidez de un auto que patina** La policía usa la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la rapidez s (en mi/h) a la que un auto se desliza si patina d pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número f es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo “resbaloso” de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para f .

	Asfalto	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Mojado	0.5	0.4	0.1

(a) Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se aplicaron los frenos?

(b) Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?



- 102. Distancia de la Tierra al Sol** Se deduce de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² es la constante gravitacional, y T es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es de alrededor de 365.25 días para hallar la distancia de la Tierra al Sol.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

- 103. ¿Cuánto es mil millones?** Si usted tuviera un millón (10⁶) de dólares en una maleta, y gastara mil dólares (10³) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo paso, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* (10⁹) de dólares?
- 104. Potencias fáciles que se ven difíciles** Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

(a) $\frac{18^5}{9^5}$

(b) $20^6 \cdot (0.5)^6$

- 105. Límite del comportamiento de potencias** Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre a la n raíz de 2 cuando n se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la n raíz de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué ocurre a la n raíz de n cuando n se hace grande?

- 106. Comparación de raíces** Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

(a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$

(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

(c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$

(d) $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ► Multiplicación de expresiones algebraicas ► Fórmulas de productos notables ► Factorización de factores comunes ► Factorización de trinomios ► Fórmulas especiales de factorización ► Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo x , y y z , y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica**. Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \quad \sqrt{x} + 10 \quad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k , donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama **polinomio**. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado n** . Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

▼ Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

Propiedad Distributiva

$$ac + bc = (a + b)c$$

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$



Para restar polinomios, tenemos que recordar que **si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitamos el paréntesis**:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

- (a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.
 (b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

- (a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$
 $= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ *Agrupe términos semejantes*
 $= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ *Combine términos semejantes*
- (b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$
 $= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ *Propiedad Distributiva*
 $= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ *Agrupe términos semejantes*
 $= -11x^2 + 9x + 4$ *Combine términos semejantes*

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 15 Y 17

▼ Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
F O I L

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (*First*) términos, los términos externos (*Outer*), los términos internos (*Inner*) y los últimos (*Last*).

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL

$$\begin{aligned}
 (2x + 1)(3x - 5) &= 6x^2 - 10x + 3x - 5 && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= 6x^2 - 7x - 5 && \text{Combine términos semejantes}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{F} & \text{O} & \text{I} & \text{L} \end{matrix}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned}
 (2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
 &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\
 &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}
 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: Usando forma de tabla

$x^2 - 5x + 4$	
$2x + 3$	
$3x^2 - 15x + 12$	Multiplique $x^2 - 5x + 4$ por 3
$2x^3 - 10x^2 + 8x$	Multiplique $x^2 - 5x + 4$ por $2x$
$2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$	Sume términos

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

▼ Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Vea en el *Proyecto de descubrimiento*, citado en la página 34, una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B , para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$ (b) $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 29 Y 41

EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ (b) $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x + y$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 && \text{Fórmula de Producto 1} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 && \text{Fórmula de Producto 2}\end{aligned}$$

 AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 55 Y 59